

ИЗУЧАВАНЕ ТЕОРЕМИТЕ НА МЕНЕЛАЙ И ЧЕВА И НЯКОИ ТЕХНИ ПРИЛОЖЕНИЯ С ПОМОЩТА НА ДИНАМИЧНА ОБУЧАВАЩА СРЕДА

Ангел Гушев

Природо-математическа гимназия „Васил Друмев“ – Велико Търново

Резюме. В Природо-математическа гимназия „Васил Друмев“ – Велико Търново, е проведено педагогическо изследване, чиято цел е изучаването на теоремите на Менелай и Чева и някои техни приложения в часовете по математика в IX клас – второ равнище. В настоящата статия се описват стъпките на педагогическото изследване. Сравняват се резултатите на учениците преди и след обучението по класическия начин и използвайки уеб базирана динамична обучаваща среда. Правят се изводи за мястото и ролята на динамичния математически софтуер в обучението по математика.

Keywords: pedagogical research; mathematics; information technology; dynamic mathematical software

Увод. Съвременните реалности са свързани с бурно развитие на информационните и комуникационните технологии. Във връзка с това е разработена Национална стратегия за въвеждане на ИКТ в българските училища и Национална програма „ИКТ в училище“. Част от главните цели, залегнали в Стратегията, са в съответствие с нуждите на педагогическото използване на ИКТ чрез прилагане на иновационни методи и подходи в обучението.

Приоритет в насоките на МОН са идеите за използване на информационните технологии като средство за подобряване на качеството на образованието с цел по-голяма ефективност и повишаване мотивацията на учениците. Ученикът трябва да бъде не само слушател, но и участник в процеса на обучение.

Структурата на иновационния урок включва създаване на учебни ситуации, при които са налице условия за експерименти. Опитът показва, че чрез информационните технологии се увеличават възможностите за постигане на исканите резултати в обучението. При това, ако технологиите се използват като обогатяващо учебния процес средство, то учениците ще са в центъра на събитията и ще работят активно.

Не е задължително да се използват ИКТ във всяка учебна ситуация. Нещо повече – те трябва да се използват само когато учителят е убеден, че може да направи с тях нещата по-добре. Това предполага учителят да осмисли даден проблем и различните подходи за решаването му, така че използването на нови технологии да обогатява традиционния учебен процес.

В обучението по математика понякога се налага различни математически факти и твърдения да бъдат визуализирани. Изхождайки от опита си на преподаване на математика в горния курс, авторът счита, че това е най-удачно да става там, където ситуацията може да бъде подходящо параметризирана, или там, където визуализацията на дадена геометрична ситуация е от съществено значение. Един такъв пример е изучаването на теоремите на Менелай и Чева и някои техни приложения в IX клас – второ равнище. Тяхното усвояване е заложено в учебното съдържание по математика в една от най-важните теми от училищния курс – темата „Подобие“. Обикновено времето, предназначено за изучаването им, не е достатъчно и това води до недоброто им усвояване от учениците. С цел подпомагане на учебния процес е разработена уеббазирана динамична обучаваща среда.

Представяне на уеббазираната динамична обучаваща среда. Уеббазираната динамична обучаваща среда служи за подпомагане на учебния процес. Посредством динамични аплети се онагледяват основните теореми и техни приложения, а посредством набора от задачи се показват основни приложения на тези теореми в горния курс. Задачите са подбрани така, че да служат за въвеждане, усвояване и затвърждаване на знанията. Те са подредени по степен на трудност, като често се посочва логическата връзка между тях.

Динамичната среда се основава на принципа на нагледността и визуализацията като стратегия на учене. Отделните информационни единици се предложени така, че всеки модул се отнася до самостоятелна тема, която е изложена изчерпателно, точно и достъпно. От едно общо начало следват връзки към останалите учебни единици. Софтуерната основа на разработената обучаваща среда е програмата Geonext. Тя служи за създаване на геометрични и графични конструкции, като предлага една чертежна повърхност и множество конструкционни инструменти. Създадените геометрични и графични конструкции могат да бъдат коригирани по различни начини и динамично променяни, което дава богати възможности за анимиране на математическата ситуация.

Ключово е гъвкавото използване на динамичните аплети като основа за някои от следните дейности: илюстрация, когато учениците наблюдават геометрична реализация на математически резултат и разсъждават върху него; демонстрация, когато учениците проследяват взаимовръзката между дадени понятия; конструкция, когато на учениците се поставя задача сами да построят определени обекти; дедукция, когато на учениците се поставя задача сами да анализират и систематизират наблюдения, да правят обосновани изводи;

и *апликация*, когато учениците се насърчават да търсят интердисциплинарни приложения на определени математически резултати.

В повечето случаи в динамичната среда един и същ аплет се използва за няколко различни дейности.

Представяне на педагогическото изследване. За да се апробира използването на динамичната обучаваща среда през учебната 2009/2010 година в Природо-математическа гимназия „Васил Друмев“ – Велико Търново, беше проведено педагогическо изследване. Предмет на педагогическото изследване беше изучаването на теоремите на Менелай и Чева и някои техни приложения в часовете по математика в IX клас – второ равнище. Обект на педагогическото изследване бяха 50 ученици от девети клас профил природо-математически. Двадесет и пет ученици – математика с английски език, бяха контролна група, а 25 ученици – математика с немски език, експериментална група.

След изучаване на материала за пропорционални отсечки, теоремата на Талес и подобни триъгълници бе проведена контролна работа. Тя послужи за проверка на съществуването на статистически значима разлика между нивото на учениците от двата класа и се използва като входно ниво на провеждания експеримент.

Целта на входното ниво бе да се провери подготвени ли са учениците за разширяване на знанията им, чрез усвояване на теоремите на Менелай и Чева и някои техни приложения.

Критерий бе усвоеността на знанията и уменията за решаване на задачи, а показатели – обемът на знания и тяхната задълбоченост. За измерване на показателите бе използвана стандартната петстепенна скала с най-ниска степен „Слаб“ и най-висока степен – „Отличен“.

В контролната работа бяха включени четири задачи, чрез които се проверяват знанията на учениците за свойство на ъглополовящите, теорема на Талес и подобни триъгълници.

Представяме ви условията на задачите.

Задача 1. Даден е трапецът $ABCD$. Бедрата му AD и BC се пресичат в т. Q , диагоналите AC и BD се пресичат в т. O , $OM \perp AB$ (т. $M \in AB$), $ON \perp CD$ (т. $N \in CD$).

а) ако $QC = 8$, $QD = 2AD$, да се намери BC ;

б) ако $AB = 7$, $CD = 5$, $ON = 2,5$, да се намерят OM и S_{ABCD} .

Задача 2. Отсечка AL е ъглополовяща в $\triangle ABC$, а точките K и M лежат съответно на страните AB и AC така, че $KL \parallel AC$, $ML \parallel AB$.

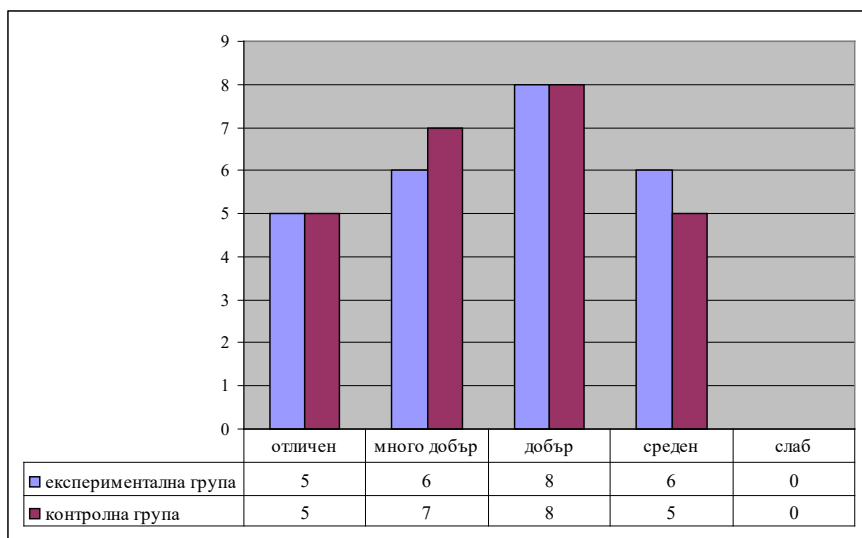
а) да се докаже, че $AKLM$ е ромб;

б) ако $AB = a$, $AC = b$, да се намери страната на ромба.

Задача 3. AB е хорда на окръжност с радиус 6. Разстоянието от т. A до допирателната към окръжността в т. B е 9. Намерете дължината на AB .

Задача 4. В $\triangle ABC$ $\angle ACB = 90^\circ$, CH е височина, а CL е ъглополовяща (т. $L, H \in AB$). Ако $AC = 15$, а $BI = 20$, да се намери дължината на HL .

Резултатите от входното ниво на учениците са дадени на фигура 1.



Фигура 1

Статистическата обработка на резултатите е представена в таблица 1.

Таблица 1

	Средно аритметично $\bar{x}$	Мода Mo	Медиана Me	Дисперсия S^2	Средно квадратично отклонение $S = \sqrt{S^2}$
Контролна група	4,48	4	4,44	1,09	1,05
Експериментална група	4,48	4	4,31	1,17	1,08

Използвани са стандартните означения:

- k – брой на различните оценки;
- x_i – оценка при $k = i$;
- n – обем на извадката;

– f_i – абсолютна честота на оценката i ;

$$- \bar{x} - \text{средно аритметично } \left(\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{n} \right);$$

– Mo – мода (числовата стойност на x_p , която има най-голяма абсолютна честота f_i);

– Me – медиана (числова стойност, която разделя вариационния ред на равни части);

$$- S^2 - \text{дисперсия } \left(S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \right);$$

– $S = \sqrt{S^2}$ – средноквадратичното (стандартно) отклонение.

След статистическата обработка на резултатите от входното ниво основната ни задача бе да проверим дали двете извадки принадлежат към една и съща генерална съвкупност. Първо, чрез F-критерия на Фишер проверихме, че дисперсиите на генералните съвкупности са равни. След това чрез t-критерия на Стюдънт определихме теоретичните средни стойности на генералната съвкупност и видяхме, че те са равни.

След като установихме, че между входните резултати на двата класа няма статистически значима разлика, пристъпихме към изложението на теорията. Подредбата на задачите при изучаването на теоремите на Менелай и Чева бе една и съща в контролната и експериментална група. Разликата бе в начина на преподаване. В контролната група то се извърши по класическия начин – с маркер и бяла дъска, а в експерименталната група – посредством уеббазираната динамична обучаваща среда.

В края на обучението с учениците беше проведена контролна работа, която изигра роля на изходно ниво. Учениците в рамките на 90 минути решаваха четири задачи. С първата задача се проверяваха умения за непосредствено прилагане теоремата на Чева. Втората задача бе непосредствено приложение на теоремите на Менелай. Третата задача изискваше използване на свойството на ъглополовящите и теоремата на Менелай. За решаването на четвърта-

та задача бе необходимо използване на подобни триъгълници и теоремата на Менелай.

Представяме ви условията на задачите.

Задача 1. Една от външновписаните за ΔABC окръжности се допира до страната AB в т. C_1 и до продълженията на страните CA и CB съответно в т. B_1 и A_1 . Да се докаже, че правите AA_1 , BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка.

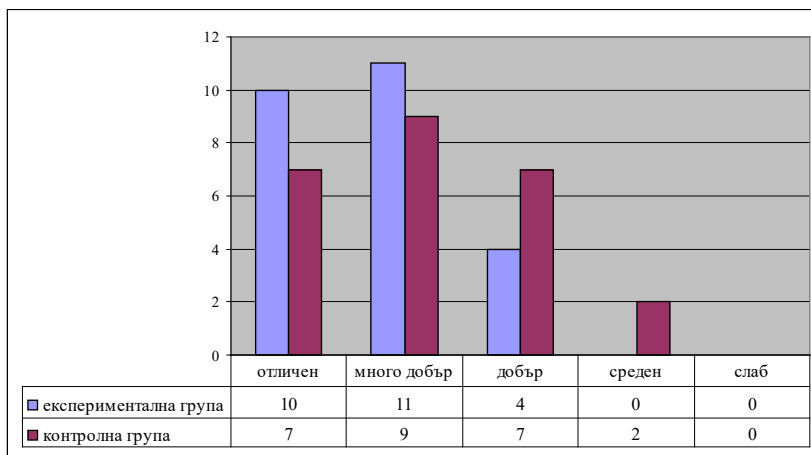
Задача 2. В ΔABC точка M е среда на страната AB , а точка P дели вътрешно CM в отношение 3:2, считано от т. C . Ако правата AP пресича страната BC в точка K , да се намери отношението $BK : KC$.

Задача 3. В разностранния триъгълник ABC вътрешната ъглополовяща през върха A пресича BC в точка A_1 ; вътрешната ъглополовяща през върха B пресича CA в точка B_1 ; външната ъглополовяща през върха C пресича AB в точка C_2 . Да се докаже, че точките A_1 , B_1 и C_2 са колинеарни.

Задача 4. Окръжностите $k_1(O_1, r_1)$; $k_2(O_2, r_2)$ и $k_3(O_3, r_3)$ имат различни радиуси и всеки две са външни една за друга. Общите външни допирателни на k_1 и k_2 се пресичат в т. A , общите вътрешни допирателни на k_1 и k_3 се пресичат в т. B , а общите външни допирателни на k_2 и k_3 се пресичат в т. C . Да се докаже, че точките A , B и C лежат на една права.

Основната цел бе да се установи до каква степен учениците са усвоили изучавания материал, свързан теоремите на Менелай и Чева, и да се провери има ли статистически значима разлика между резултатите на контролната и експерименталната група.

Резултатите от изходното ниво са дадени на фигура 2.



Фигура 2

Статистическата обработка на резултатите е представена в таблица 2.

Таблица 2

	средно аритметично $\bar{x}$	Мода Mo	Медиана Me	Дисперсия S^2	средно квадратично отклонение $S = \sqrt{S^2}$
Контролна група	4,84	5	5,12	0,89	0,94
Експериментална група	5,24	5	5,29	0,52	0,72

Нивото на дисперсията на контролната група показва, че полученият висок резултат е постигнат от почти всички, тъй като успехът на повечето ученици с малко се различава от средния успех на изходното ниво.

Доверителния интервал пресмятаме по формулата:

$$D = \left(\bar{x} - U_{\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{x} + U_{\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right), \text{ където } U_{\alpha} = \begin{cases} 1,96 & \text{за } \alpha = 0,05 \\ 2,58 & \text{за } \alpha = 0,01 \end{cases}.$$

При педагогическите изследвания се взема $U_{\alpha} = 1,96$.

В случая получаваме, че $D = (4,47; 5,21)$.

Съгласно методиката, дадена в (Bizhkov, 1988), може да твърдим, че с вероятност за грешка 5% средният успех за всички деветокласници, които

се обучават по класическата програма, се очаква да принадлежи в този интервал.

За доверителния интервал на експерименталното група получаваме $D = (4,96; 5,52)$.

Може да твърдим, че с вероятност за грешка 5% средният успех за всички деветокласници, които се обучавани, използвайки динамичната обучаваща среда, се очаква да принадлежи в посочения интервал.

След статистическата обработка на резултатите от изходното ниво бе извършена проверка дали има статистически значима разлика между изходните резултати на двете групи.

Проверката бе извършена по познатия ни вече алгоритъм – първо проверяваме, че дисперсиите на генералните съвкупности са равни, после определяме теоретичните средни стойности на генералната съвкупност и виждаме, че са различни. Това показва, че *между входните резултати на двете групи има статистически значима разлика*.

Получените резултати на изхода са по-високи от входните и за двете групи, но докато при входното ниво нямаме статистически значима разлика между резултатите на контролната и експерименталната група, то на изхода тази разлика е вече статистически значима. Това показва, че повишаването на нивото на учениците не се дължи на случайни фактори, а на обучението с уеббазираната динамична обучаваща среда.

Заключение. В резултат на целенасочена и упорита работа основната цел беше постигната – беше разработена уеббазирана методическа система от уроци за усвояване теоремите на Менелай и Чева, наречена динамичната обучаваща среда. Тази методическа система беше експериментирана в Природо-математическа гимназия „Васил Друмев“ – Велико Търново. В резултат на експеримента се потвърди работната хипотеза, че целенасоченото обучение на учениците, използвайки динамичната обучаваща среда, ще доведе до повишаване нивото на знанията за решаване на задачи, свързани с теоремите на Менелай и Чева и някои техни приложения.

Основният извод, който може да направим, е, че използването на динамичен математически софтуер поставя основите на един учебен процес, предоставящ на учениците възможност за самостоятелна, индивидуална и колективна работа, както и за един активен, изследователски подход при изучаването на математическата материя. В хода на тази дейност учителят е модератор, който предлага на учениците широка палитра от учебни ситуации. Това спомага за пълноценното осмисляне на характеристиките на ситуацията; за изграждането на хипотези, за проверка на верността им; за визуализиране и анализиране на крайния резултат. Ефект, който трудно може да бъде постигнат при използването на традиционните начини на преподаване.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Andreev, M. (1996). *Protsesat na obuchenieto. Didaktika*. Sofia: Sv. Kl. Ohridski. [Андреев, М. (1996). *Процесът на обучението. Дидактика*. София: Св. Кл. Охридски].
- Bizhkov, G. (1983). *Problemi na pedagogicheskata diagnostika*. Sofia: Narodna prosveta. [Бижков, Г. (1983). *Проблеми на педагогическата диагностика*. София: Народна просвета].
- Bizhkov, G. (1988). *Pedagogicheskata diagnostika*. Sofiya: Narodna prosveta. [Бижков, Г. (1988). *Педагогическата диагностика*. София: Народна просвета].
- Bizhkov, G. (1994). *Reformatorskata pedagogika*. Sofia: Prosveta. [Бижков, Г. (1994). *Реформаторската педагогика*. София: Просвета].
- Bizhkov, G. (1995). *Metodologia i metodi na pedagogicheskite izsledvaniya*. Sofia: Askoni. [Бижков, Г. (1995). *Методология и методи на педагогическите изследвания*. София: Аскони].
- Ganchev, I., Kolyagin, Yu. & Kuchinov, Y. (1996). *Metodika na obuchenieto po matematika ot VIII do XI klas – parva chast*. Sofia: Modul. [Ганчев, И., Колягин, Ю. & Кучинов, Й. (1996). *Методика на обучението по математика от VIII до XI клас – първа част*. София: Модул].
- Ganchev, I., Kolyagin, Yu. & Kuchinov, Y. (1998). *Metodika na obuchenieto po matematika ot VIII do XI klas – vtora chast*. Sofia: Modul. [Ганчев, И., Колягин, Ю. & Кучинов, Й. (1998). *Методика на обучението по математика от VIII до XI клас – втора част*. София: Модул].
- Grozdev, S. & Chehlarova, T. (2008). *Sbornik dokladi „Ruskata nauka, obrazovanie i kultura v savremenniya svyat“*. *Metodika i informatsionni tehnologii v obrazovaniето*. Stara Zagora. [Гроздев, С. & Чехларова, Т. (2008). *Сборник доклади „Руската наука, образование и култура в съвременния свят“*. *Методика и информационни технологии в образованието*. Стара Загора].
- Gushev, A. (1967). *Teoremi na Menelay i Cheva*. Sofia: Tehnika. [Гушев, А. (1967). *Теорема на Менелай и Чева*. София: Техника].
- Gushev, A. & Gushev, V. (2007). *Matematika i matematichsko obrazovanie. Elektronen uchebnik po matematika za osmi klas*, 341 – 348. [Гушев А. & Гушев, В. (2007). *Математика и математическо образование. Електронен учебник по математика за осми клас*, 341 – 348].
- Lazarov, B. & Todorova M. (2011) *Organizirane na izsledovatelskoto tarsene na uchenitsite v sreda na sistema za dinamichna geometriya. Obrazovanie i tehnologii. Tom 2*. [Лазаров, Б & Тодорова М. (2011) *Организиране на изследователското търсене на учениците в среда на система за динамична геометрия. Образование и технологии. Том 2*].

- Lazarov, B. (2012). Individualna obrazovatelna traektoriya. Izsledvane na chasten sluchay. *Matematika i informatika*, 3, 238 – 248. [Лазаров, Б. (2012). Индивидуална образователна траектория. Изследване на частен случай. *Математика и информатика*, 3, 238 – 248].
- Vasileva, M. (1993). *Pedagogicheska psihologiya*. Sofia: Sv. Kl. Ohridski. [Василева, М. (1993). *Педагогическа психология*. София: Св. Кл. Охридски].

TEACHING THEOREMS OF MENELAUS AND CEVA AND SOME OF THEIR APPLICATIONS USING A DYNAMIC LEARNING ENVIRONMENT

Abstract. An educational research was carried out in the High School of Mathematics and Natural Science of Veliko Turnovo. Scope of this research was the study of the theorems of Menelaus and Ceva and some of their applications in second level mathematics classes of ninth grade. This article describes the steps of this pedagogical research. The results of the students before and after teaching in the traditional way and teaching using a web-based dynamic learning environment are investigated and compared. Conclusions about the place and the role of the dynamic mathematical software in the mathematics education are given.

✉ **Mr. Angel Gushev**

High School of Mathematics and Natural Science „Vasil Drumev”

10, Vela Blagoeva Str.

5000 Veliko Tarnovo, Bulgaria

E-mail: angel_hg@abv.bg