

*Interdisciplinary
Интердисциплинарните връзки*

ВИСША МАТЕМАТИКА ЗА УЧИТЕЛИ, УЧЕНИЦИ И СТУДЕНТИ: ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

Б. В. Тошев

*Българско дружество за химическо образование
и история и философия на химията*

Резюме. Само четири основни положения са необходими за построяване на апарата на висшата математика – интуитивната представа на човека за скорост, математическата представа за непрекъснатост на функция и две граници, които, поради особената си роля в математиката, са означени като „забележителни“; първата забележителна граница е $(\sin x/x)_{x \rightarrow 0} = 1$, а втората забележителна граница е $(1+x)^{1/x}_{x \rightarrow 0} = e$. Така построяването на апарата на диференциалното смятане може да се направи без особено усилие от всеки. В тази статия е показано как става това.

Keywords: higher mathematics, derivatives, Newton, Leibnitz

Увод

Задача на училището е да стимулира *креативното мислене* на учениците. Креативното мислене е *критично* – това означава оценка на обстоятелствата, при които се появява едно явление или протича някакъв процес с преценка на онези фактори, които са съществени, и разпознаване на факторите, които са с второстепенна роля. Много са хората, които мислят с образи – това са хората с хуманитарна нагласа на съзнанието. По-малко са носителите на аналитичното мислене – те мислят с числа и могат с абстрактни конструкции да формализират това, което наблюдават; успехът на тези хора в природните науки най-често е гарантиран. Има обаче и трета категория хора – хората с *имитация на мислене*; човек е устроен така, че може да комбинира образци-клишета, които получава от околната среда, и по този начин да имитира мисловен процес. Тази имитация е особено важна, защото чрез комбинацията на клишетата, които той получава от обкръжението си – от близките, улицата, училището, медиите, познатите, всеки човек може да си осигури комфорт в минисредата, в която живее.

Описаните по-горе различия са вродени белези на личността и на тях училището не би могло да влияе особено съществено. Училището обаче трябва да полага грижи за преодоляването на натрупани личностни предубеждения. Едно от тези предубеждения е широко ширещата между хората нагласа, че математиката е особено трудна и не е за всеки.

Математиката наистина е трудна, защото борави с *числа*, за които човек няма интуитивна представа; дори преценката дали едно число е малко, или голямо създава затруднения. Ето пример от химията – най-важното число в химията е числото на Авогадро – $6,02 \cdot 10^{23}$, което дава броя частици в 1 мол вещество. Декларира се, че това число е много голямо, но усещането за това, че този брой частици наистина е огромен, обикновено липсва. Това усещане ще се появи, ако на обучаемите се предложи например следното разсъждение. Да допуснем, че на Земята живеят 5 милиарда хора. Да допуснем, че във Вселената има 5 милиарда планети и на всяка от тях живеят по 5 милиарда хора. Тогава общият брой на хората, които „населяват“ Вселената, ще бъде $5 \cdot 10^9 \times 5 \cdot 10^9 = 2,5 \cdot 10^{19}$. В молекулната физика това число (на Лошмит) дава броя на молекулите в 1 cm^3 газ при температура 0°C и налягане 101325 Pa (1 атм.). След това разсъждение всеки ще разбере, че числото 25 милиарда наистина е много голямо. А числото на Авогадро е около 30 000 пъти по-голямо от числото на Лошмит.

Човек няма интуиция за числа, но има интуиция за скорост – всеки усеща дали едно тяло се движи бързо, или бавно. Това е достатъчно, за да се достигне с лекота до основното понятие на диференциалното смятане – понятието „производна“. Ако към интуитивната представа за скорост се добави допълнителна математическа информация, която се изчерпва само в три пункта, тогава построяването на апарата на висшата математика ще се окаже възможно и не особено трудно. В тази статия е описано как става това.

Производна на функция

Величините са *постоянни* и *променливи*. Променливите величини се изменят по-бързо или по-бавно, т.е. промяната на стойностите на тези величини може да става с различна скорост.

Едно тяло се движи, когато променя положението си спрямо други тела. Казваме, че познаваме *закона на движение* на едно тяло (масова точка), когато знаем как на всяка стойност на времето x може да се съпостави определен път y :

$$y = f(x) \tag{11}$$

Тук буквата f символизира въпросното правило.

Ако е известно правилото, посредством което на всяка стойност на променливата x се поставя в съответствие определена стойност на променливата y , тогава се казва, че променливата y е *функция* на променливата x .

Така, абстрахирайки се от конкретното физическо съдържание на израза (1), се достига до *началното понятие* в математиката – *функция*. При това x е *аргументът* на функцията, а y е *частната стойност* на функцията в точката x .

Нека отново (1) е законът на движение на една масова точка и да изчислим *средната скорост*, с която тя се движи в промеждутъка от време от x до $x+\Delta x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

В общия случай изразът (2) зависи както от избраната стойност на x , така и от избрания интервал от време Δx . Тази двойна зависимост може да се отстрани, като се устреми интервалът от време към нула:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3)$$

Така се въвежда *моментната скорост*, с която се движи масовата точка – скоростта, която има тялото в даден момент x .

Ако отново се абстрахираме от конкретното физическо съдържание на горните изрази и (1) е запис на някаква *функция*, тогава (3) е нейната *производна* в точката x , която е прието да се означава като $y'(x)$, $f''(x)$ или dy/dx .

Понятието *производна* е основно понятие във висшата математика. Дефиницията (3) веднага разкрива и *физическия смисъл на производната* – моментната скорост, с която променя стойностите си някаква величина. В нашия пример тази величина е път, който изминава едно тяло при движението си. Но в израза (3) y може да бъде всяка друга променлива величина. Например това би могло да бъде концентрацията c на някакво вещество, което участва в химическа реакция. Тогава скоростта на реакцията в даден момент t (моментна скорост) трябва да се определи, като $\pm \frac{dc}{dt}$; за да бъде скоростта на реакцията винаги с положителна стойност, знакът (+) се използва, когато c е концентрацията на продукт на реакцията, а знакът (-) тогава, когато c е концентрацията на изходно вещество, което се изчерпва в хода на реакцията.

Описаният тук „физичен“ подход в построяването на апарата на диференциалното смятане е предложен от Нютон (фиг. 1).

Пресмятане на производни

Нека да изчислим производната на функцията $y = x^n$. За да приложим формула (2), най-напред трябва да пресметнем Δy , след което ще разделим полученото на Δx :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n \quad (4)$$

При пресмятането на (4) трябва да се използва биномът на Нютон:



Фигура 1. Портрет на Нютон (1642 – 1727) от 1702 г.¹⁾

$$(x + \Delta x)^n = x^n(\Delta x)^0 + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + x^0(\Delta x)^n \quad (5)$$

Биномът на Нютон се изучава в средното училище. Учениците познават добре тази формула при $n=2$ във вида $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ и при $n=3$ във вида $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. За друго n определянето на т.нар. биномиални коефициенти може да стане чрез триъгълника на Паскал:

$n = 0 :$					1
$n = 1 :$				1	1
$n = 2 :$			1	2	1
$n = 3 :$		1	3	3	1
$n = 4 :$	1	4	6	4	1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Не може да не се забележи, че формула (5) съдържа събираеми, всяко от които е произведение от две величини със степенни показатели, които, сумирани, винаги трябва да дават n ($(\Delta x)^0 = 1$ и $x^0 = 1$). Така за (4) получаваме

$$\Delta y = nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n \quad (6)$$

За да намерим производната на функцията $y = f(x)$ по формула (3), трябва да разделим израза (6) на (Δx) след което трябва да извършим граничния преход $(\Delta x) \rightarrow 0$. Тогава в израза $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ последното събираемо ще бъде със степенен показател $n-1$ и при $(\Delta x) \rightarrow 0$ ще клони бързо към нула, особено когато n е достатъчно голямо. Останалите събираеми с (Δx) също ще клонят към нула, но по-бавно от последното; първото събираемо обаче няма да съдържа (Δx) .

Така за производната на степенната функция $y = x^n$ получаваме

$$y' = nx^{n-1} \quad (7)$$

Ако пътят и времето са в правопрпорционална зависимост, $y = kx$ ($k = \text{const}$), тогава тялото се движи с постоянна скорост и средната и моментната скорост са неразличими. Наистина, в този случай от (2) следва:

$$y' \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} = k \quad (8)$$

Единственото, което бе нужно за пресмятането на тези производни, бе представата за скорост. Ще бъде прибързано обаче да мислим, че по този начин ще можем да изчисляваме и производните на други функции. За построяването на апарата на диференциалното смятане имаме нужда от допълнителна математическа информация – две граници и една важна математическа представа – представата за *непрекъснатост на функцията*.

Какво още е нужно

Несъмнено представата за *непрекъснатост на функцията* е с ключово значение за построяването на апарата на диференциалното смятане. Затова математиците разглеждат тази тема с особено внимание (вж. напр. Смирнов, 1967) и правят това дори в университетските си курсове за студенти от други специалности.

Една функция $f(x)$ се нарича *непрекъсната* в една точка x_0 от дефиниционната си област, когато на всяко положително число ε може да се съпостави положително число δ (евентуално зависещо от ε) така, че за всички точки x от дефиницион-

ната област на функцията, за които $|x - x_0| < \delta$ да е изпълнено неравенството $|f(x) - f(x)_0| < \varepsilon$ (Тагамлици, 1967).

Тъй като целта на тази статия е да покаже на непосветения в математиката ученик или студент как сам да изчислява производни и по този начин да се докосне до висшата математика, ние ще изоставим полето на строгия анализ и ще направим следната декларация, която се очаква да предизвика възмущението на професионалните математици: *непрекъснати са функциите*, за които е изпълнено условието

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x) \quad (9)$$

т.е. когато аргументът на функцията се стреми към числото x , то стойността на функцията се стреми към числото $f(x)$ – тогава функцията е *непрекъсната* в точката x .

За да продължим по-нататък, е нужно да запомним без доказателство две граници. Те са толкова важни за математиката, че някои ги означават като *първа забележителна граница* и *втора забележителна граница* (Ильин & Позняк, 1965).

Първа забележителна граница

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (10)$$

Тази граница се изучава в курса по математика в средното училище. Едно просто доказателство на този резултат ще видите в края на настоящата статия (Приложение).

Втора забележителна граница

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (11)$$

Ирационалното число $e = 2,718281828...$ се нарича *Неперово* (или *Ойлерово*) число. То е основа на натуралните логаритми. Навярно числата e и $\pi = 3,141592653...$ са най-важните числа в математиката.

Изчисляване на други производни

Сега вече можем да намерим производната на $y = \sin x$. Тригонометричните функции са много важни за физиката, химията и биологията. Трепетливите движения се описват с тях.

Най-напред пишем

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} \quad (12)$$

После

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \quad (13)$$

Остава да намерим $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, съобразявайки, че функцията $y = \sin x$ е непрекъсната и вземайки под внимание границата (10). Следователно

$$y' = (\sin x)' = \cos x. \quad (14)$$

Вторият пример е логаритмичната функция (при основа a) $y = \log_a x$:

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \quad (15)$$

Тогава

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \left[\frac{x}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \right] = \frac{1}{x} \log_a\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \quad (16)$$

Остава да намерим $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, съобразявайки, че логаритмичната функция е непрекъсната и вземайки под внимание границата (11). Следователно

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \quad (17)$$

Ако логаритъмът е при основа $a=e$, той се нарича *натурален* и се означава като $\ln x$. Тогава производната на функцията $y = \ln x$ в съгласие с (17) ще бъде

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (18)$$

Разгледаните примери показват пътя, по който се изгражда апаратът на диференциалното смятане. Ако се налага диференциране на различни функции, операциите изискват известна рутина, която включва и запомняне на производните на основните елементарни функции. Към получените вече производни (7), (14), (17) и (18) следва да добавим:

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (19)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (20)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (21)$$

А правилата за диференциране на сложни функции – сума, разлика, произведение и частно на две функции, са:

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x) \quad (22)$$

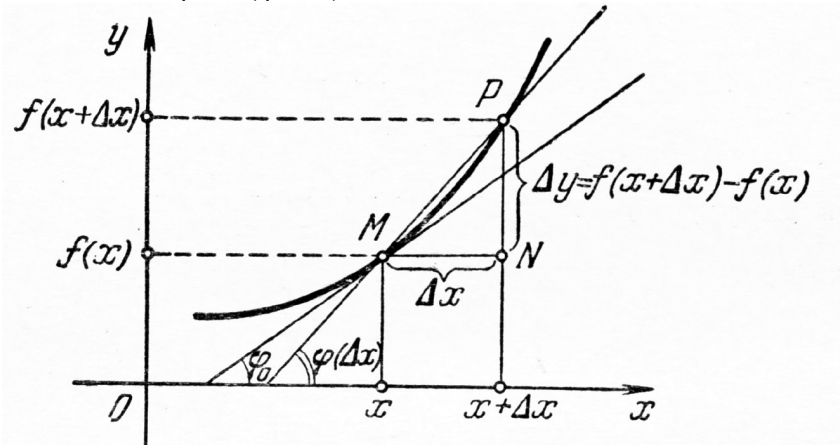
$$[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \quad (23)$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (24)$$

Геометричен подход на Лайбниц

На $y=f(x)$ може да се гледа и по друг начин – това не е закон на движението на едно тяло, а е *уравнение на крива* в равнината.

Разгледайте този чертеж (фиг. 2).



Фигура 2. Графично изображение на $y=f(x)$ декартова координатна система

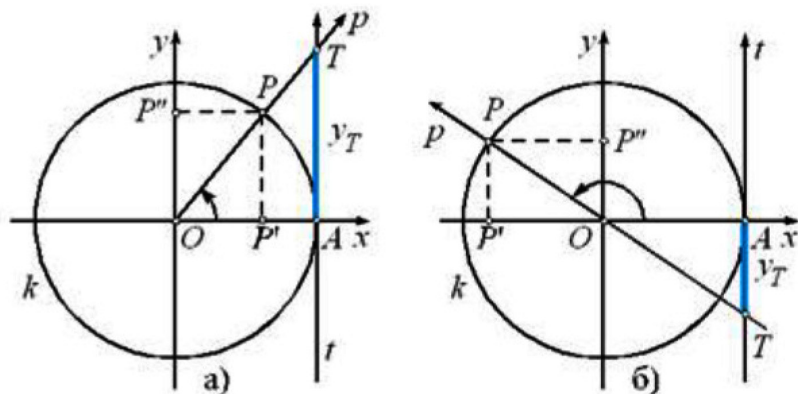
Ясно се виждат геометричните аналози на средната скорост (формула (2)) и на моментната скорост (формула (3)). На средната скорост отговаря тангенсът на ъгъла на *секущата* на кривата $y=f(x)$, която права минава през точките M и P на фигурата (този тангенс $(\Delta y/\Delta x)$ в аналитичната геометрия се нарича *ъглов коефициент* на права, $\kappa=\operatorname{tg} \varphi$). Когато Δx намалява ($\Delta x \rightarrow 0$), ъгълът φ се променя, достигайки до φ_0 , когато *секущата* се превръща в *допирателна* (тангента) към кривата $y=f(x)$ в точката M . Следователно геометричният аналог на моментната скорост (формула (3)) е тангенсът на ъгъла, който сключва допирателната към кривата в дадена нейна точка с положителната посока на абсцисната ос $(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x})$ (фиг. 3).



Фигура 3. Г. Ф. Лайбниц (1646 – 1716)¹⁾

Ако за всички точки в интервала от x до $x+\Delta x$, ъглите φ_0 между съответните допирателни и положителната посока на оста x са *остри*, тогава стойностите на техните тангенси са *положителни* числа. Това е така, защото в този интервал функцията $y=f(x)$ е *монотонно растяща*. Ако в този интервал тези тангенси на ъгли φ_0 бяха отрицателни числа, тогава функцията $y=f(x)$ щеше да бъде *монотонно намаляваща* (вж. тригонометричната окръжност с оста на тангенсите на фиг. 4).

Следователно запазването на положителни стойности на производните на дадена функция в някакъв интервал от точки на аргумента е индикация, че в този интервал функцията е монотонно растяща. Обратно, при отрицателни стойности на тези производни функцията ще бъде монотонно намаляваща. Ако функцията най-напред е растяла и после е започнала да намалява, то има точка, в която производната на функцията ще смени знака си от положителен в отрицателен. Ако функцията най-напред е намалявала и после е започнала да расте, то има точка, в която производната на функцията ще смени знака си от отрицателен в положителен.



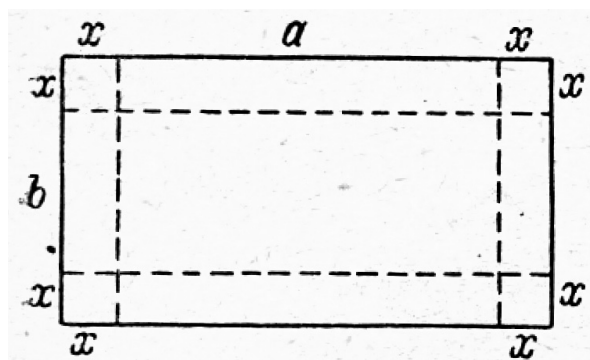
Фигура 4. Тригонометричната окръжност с оста на тангенсите

Това е много важно наблюдение, което показва, че условието за *екстремум* на функция (максимум или минимум) може да бъде намерено чрез

$$y' = f'(x_m) = 0 \quad (25)$$

Числен пример

На един майстор железар са дали ламаринен лист с правоъгълна форма и с размери a m x b m. От него поискали да направи правоъгълна лабораторна вана, но дълбочината ѝ x бъде такава, че съдът да има възможно най-голям обем. Изготвянето на такава вана чрез изрязване и подгъване на краищата, както е показано на фиг. 5, е съвсем просто. За да прецени каква да бъде дълбочината на ваната x , майсторът провел следните пресмятания.



Фигура 5. Изготвяне на вана с формата на правоъгълен паралелепипед

Обемът на ваната се изчислява по:

$$V = (a - 2x)(b - 2x)x \quad (26)$$

За да се намери дълбочината x , при която ваната ще има най-голям обем, трябва да се използва условието (25). Затова намираме производната на V по x и я приравняваме на нула. Така получаваме квадратното уравнение

$$12x^2 - 4(a + b)x + ab = 0 \quad (27)$$

Корените на това уравнение са два и се намират по формула, която всеки ученик знае

$$x_{1,2} = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} \quad (28)$$

Майсторът не е съвсем сигурен в математическите си познания и решава да спре анализа на задачата тук. Той обаче трябва да прецени коя от двете стойности на x в (28) осигурява максималния обем на ваната. При известните размери на ламаринения лист – например $a = 2$ м и $b = 1$ м, той ще пресметне x_1 и x_2 и после по (26) ще изчисли два обема. Тогава ще избере онова x , което дава по-голям обем.

Ето резултата от неговите пресмятания: $x_1 = 0,79$ м и $x_2 = 0,34$ м. Първият резултат обаче не е физичен резултат, защото с него обемът на съда, изчислен по формула (26), се оказва с отрицателна стойност. Тогава майсторът ще направи ваната с дълбочина 34 см, при което нейният обем ще бъде $0,14 \text{ m}^3 = 140 \text{ L}$.

Заклучение

Ще бъде заблуда, ако някой, прочитайки тази статия, остане с мисълта, че вече може да изчислява производни на различни функции. Задачата на този увод в математиката е много по-скромна – да покаже, че построяването на апарата на висшата математика е достъпно и за хора без специални математически наклонности. Ако статията постигне целта си, тогава са нужни по-сериозни занимания и, разбира се, трябва да се започне с книги за основите на висшата математика за начинаещи. Между най-добрите книги от този вид е тази на Зелдович (1968). Съветът към учителите е да полагат грижи за поддържане на интереса на учениците към математиката както в клас, и особено в извънкласната работа, с помощта на книги с разкази за математиката и математиците и с любопитни занимателни задачи и главоблъсканици. Такива са книгите на Перелман (1967), Гарднер (1967), Димовски (1981) и Ганчев et al. (1990). А особена популярност в англосаксонския свят има книгата на Dudeney (1917).

ПРИЛОЖЕНИЕ

При търсенето на граници понякога се появяват неопределености от вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и други подобни комбинации. Разкриването на тези неопределености става лесно с т.нар. правило на Лопитал – диференцира се числителят, после знаменателят и се проверява дали неопределеността е изчезнала; ако това не се случило, операцията се повтаря до получаване на резултат. Вижте как се доказва границата (10):

Начало: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$, защото при $x \rightarrow 0$, $\sin x \rightarrow 0$.

Първа стъпка: $\frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1}$, защото при $x \rightarrow 0$, $\cos x \rightarrow 1$.

Резултат: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

NOTES

1. Уикипедия

ЛИТЕРАТУРА

- Ганчев, И., Чимев, К. & Стоянов, Й. (1990). *Математически фолклор*. София: Народна просвета.
- Гарднер, М. (1967). *Математические чудеса и тайны: математические фокусы и головоломки*. Москва: Наука.
- Димовски, И. (1981). *За математиката и математиците: над 1700 мисли, афоризми, анекдоти случки и др.* София: Наука и изкуство.
- Зельдович, Я.Б. (1968). *Высшая математика для начинающих*. Москва: Наука.
- Ильин, В.А. & Позняк, Э.Г. (1965). *Основы математического анализа*. Москва: Наука.
- Перельман, Я.И. (1967). *Живая математика: математические рассказы и головоломки*. Москва: Наука.
- Смирнов, В.И. (1967). *Курс высшей математики – том I*. Москва: Наука.
- Тагамлики, Я. (1967). *Дифференциално смятане*. София: Наука и изкуство.
- Dudeney, H.E. (1917). *Amusements in mathematics*. London: Thomas Nelson & Sons.

MATHEMATICS FOR TEACHERS AND STUDENTS: CALCULUS

Abstract. Only four basic principles are necessary to construct the apparatus of calculus: the intuitive concept of speed in a mechanical sense, the mathematical notion of continuous functions and two remarkable mathematical limits. In this way the sets of differential calculus could be done without much effort from everyone. A proper scheme of such construction is presented in the present paper.

✉ **Professor B.V. Toshev,**

University of Sofia

1, James Bourchier Blvd.

1164 Sofia, Bulgaria

E-mail: toshev@chem.uni-sofia.bg