

ОТНОСНО УСЕТА ЗА БРОЕНЕ

Петър Петров, Мима Трифонова

Тракийски университет – Стара Загора

Резюме. Целта на настоящата разработка е, стъпвайки върху възгледите на автори за познавателната активност, предусещането, отношението логика – интуиция, нагледност, системен подход и антиципация, да се направи анализ на усета за броене, неговата проява и развитие. Използваните методи в разработката са свързани с подходящ подбор на задачи, в които учебната информация е синтезирана около основни понятия, притежаващи регулиращи функции спрямо останалите. За демонстрация на резултатите от анализа са използвани две геометрични задачи. Първата изисква броене на точки в конструкция. За нея са изведени няколко решения, реализиращи различни подходи при търсене на решението т.е. преброяването. Във втората задача е необходимо преброяването на триъгълници в чертеж. Описано е откриването на нейното решение с направен акцент върху рационалността при броенето, реализирана чрез предварително търсене на повтарящи се структури. Към задачата са подготвени подробни междинни чертежи, отразяващи отделните етапи от откриването на решението. Предложени са и четири задачи от раздел комбинаторика, предвидени да се решават без готови формули. При тях е важно да се усвои алгоритъмът за образуване на комбинаторно съединение, подпомагащо броенето. В заключение са направени обобщения относно предпоставките за възникване на предусещането и случаите, при които усетът за броене може да се прояви и да се развива.

Keywords: anticipation; logic; intuition; task; search for a solution

1. Въведение

Естественото число се разглежда като количествена характеристика на клас крайни равномошни множества (по Г. Кантор)¹⁾. Количествената интерпретация е на основата на възприятието. Методиката на усвояване на естествените числа включва количественото и редното значение чрез броене. Броенето е процес, при който на обектите от дадено множество съпоставяме част от редицата на естествените числа, като се спазват определени условия. Резултатът е, че последното от редицата определя и количеството на обектите.

В последните години се разработват диагностични тестове за изследване на усета за броене. Авторите им считат, че той е най-точен измерител на мате-

матическите способности. Установено е, че го има и у животните. Интересно е, че всеки от изследваните при решаване на тестовете започва да се затруднява в някакъв момент. Когато се опитва да се приложи повече логика при търсене на решението, резултатите се влошават. Нека анализираме тези техни изводи от гледна точка на водещи теоретични постановки.

2. Обосновка в няколко тези

Антиципацията, като процес, е свързана с предугаждане на събития. Докато дойде времето за възникване на реалното събитие, предварителната представа, формирана в резултат на предугаждането, се използва за обратна връзка при избора на действия. Изхождайки от предварително известни елементи, мисълта постоянно създава антиципаторни схеми, които бележат и отделните етапи, през които се преминава. По този начин всеки обособен малък междинен етап задвижва следващия в резултат на постоянно възникващата предварителна представа, формирана от натрупващата се информация в процеса.

Друга възможност при изясняването на проблема е разглеждането му от гледна точка на системния подход. Определението на Хр. Тужаров за системния подход е следното: „Подход за изследване и управление на обекти, който ги разглежда като система, в която са определени **елементите, вътрешните и външните връзки**, влияещи на функционирането на системата, като целите на всеки елемент се формират в зависимост от общото предназначение на системата“⁽²⁾.

От гледна точка на системния подход и антиципацията, усетът се проявява, когато човек усвои до степен на автоматизъм извършването на дейността. Следователно усетът се изгражда на основата на индивидуалния опит и поради тази особеност усетът е различен за всеки човек, което затруднява еднозначното описание на бързо протичащите процеси при преминаване през отделните етапи и достигане до крайното решение.

Друга интересна теза, която потвърждава значимостта на усета, откриваме при Рей. „Накратко, всяка компетентност в същността си е ограничена и свързана с някакъв обект, следователно – отнася се за някаква област“ (Rey, 1996). Това подсказва за ограниченост на обхвата на понятието. Опит за разрешаване на противоречието намираме в разсъжденията на Я. Мерджанова, където тя интерпретира съществуването на два аспекта на компетентността – като функция и като интенция. „Наистина (компетентността функция) не може да надскочи спецификата. Но (компетентността интенция) като гледна точка, като подход, като маниер, като стил – тя може и трябва да се формира педагогически и да се пренася през възрастите и дейностите. Това е смисълът, който всеки субект придава на ситуациите (в които действа чрез тесните си компетенции)“ (Merджанова, 2005).

Ще приведем някои потвърждения от теориите за развитие на интелекта.

3. Възгледът на Улрик Найсер за познавателната активност

В основата на познавателната активност на човека стои възприятието, насочвано от предусещането (където предусещането е част от антиципацията). Манипулирането с предусещанията е една от най-фундаменталните операции сред всички така наречени висши психически процеси (Minchev, 1991). Например в резултат на проявата на предусещанията възниква разбирането, че предметите са твърди, тежки, топли и др., без да ги докосваме, а само познавайки предварително някои техни характеристики, които те притежават или проявяват по време на наблюдението в ситуацията.

Предусещането в структурата на уменията да се решават задачи

Според У. Найсер – основател на когнитивната психология, „човешката познавателна активност е по-полезна да се схваща като колекция от придобити умения, отколкото като действие на един-единствен фиксиран механизъм“ (Naiser, 1976). Умението да се решават задачи, се развива чрез усилия и интелигентност (или „ум“ според речника на обикновените хора), където мисленето се проявява най-вече чрез рефлексията и предвиждането. Последното се проявява като: **предусещане на хода на решаване** (първа съставка); **построяване на множество от идеи за решаване** (втора съставка); **самоформиране** в процеса решаване на дадена задача на критерии за оценка, които не са отнапред зададени, и **формиране на навици да се внимава** (трета съставка).

При решаване на задачи чувството на ситуацията се разгръща на етапа на разбиране на задачата като зрителни конфигурации и увереност. В зависимост от предусещане на благоприятен или неблагоприятен ход на решаване се отключват навици или съкратени мисловни процедури при успех и метакогнитивни компоненти при неуспех. То е свързано с въпроса „Решавали ли сме аналогична задача?“. Може да се очаква по-висока преносимост на чувството за ситуация относно обобщени компоненти на уменията да се решават задачи или неговия дейностен аспект.

Отношенията логика – интуиция, алгоритмично – евристично

Противоречивата същност между логика и интуиция се изразява в думите на Д. Б. Богоявленска. Тя изтъква, че липсва зависимост между показателите за интелект и креативност: логиката задържа това, което мозъкът твори, тя изпълнява ролята на вътрешен критик, а главни „потърпевши“ са Интуицията, Чувствителността към проблемите и Оригиналността (Bogoyavlenska, 1982).

Бъв вариант, при който отсъства логиката, формирана от решаването на задачи, то интуицията, чувствителността и оригиналността не са достатъчни дори за започване решението на задачата, т.е. липсва основният конструкт, който е отговорен за поставяне на началото на процеса. Следователно в началото е важно да присъства логиката. В този смисъл се очертава въпросът:

Как на определен етап, когато логиката доминира, ние да я потиснем, за да се даде шанс на интуицията, чувствеността и оригиналността да се проявят?

Често в процеса на търсене на рационалност на решението (подобно търсене обикновено се случва при втори оглед на вече решената задача) има предпоставки за възникване на интуицията и проява на оригиналност. При поредния оглед на вече решената задача, когато имаме резултат, можем да забележим къде в хода на неговото достигане може да се оптимизират някои действия.

При развитие на усета за броене (и като цяло предусещанията) се осъществява и преход от алгоритмично към евристично развитие на усещане за правдоподобност на междинни резултати при решаване на задачи. При ефективно разрешаване на проблемна ситуация човек може да открие различно динамическо отношение между алгоритмичните и евристичните компоненти на процеса решаване. Тази теза може да се интерпретира по следния начин. В решаването на задачата основна роля е изиграл прецизният математически алгоритъм, а евристичните въпроси при анализа на задачата съвсем малко са подпомогнали насочването към него и неговата модификация. Но кое е позначимо, трудно може да се каже: дали алгоритъмът, водещ винаги до решение, или евристичните въпроси.

Усетът за броене на елементи в геометрични конструкции чрез създаване и опериране с пространствени образи е добра основа за реализиране на развиващите функции на обучението. Така се развива и пространственото въображение и се усвоява собствено геометричният метод за решаване на задачи. Проявата на усет в умението да се брои, повдига следния въпрос: Какво означава усет за броене – да се брои бързо, да се брои рационално, да се брои по различни начини?

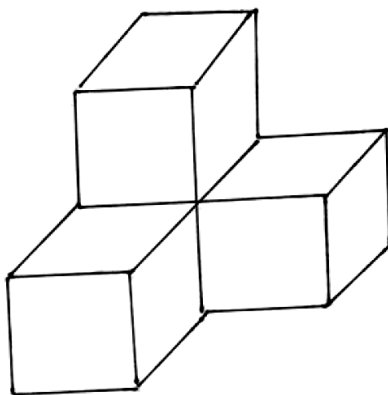
Ще добавим, че нагледната идея не е просто нагледност, не е само „свързване на нагледните (образните) и отвлечените моменти на мисленето“ (Menchinskaya, 1995) или „усвояване на нагледния метод като собствено геометричен метод“ (Rayzhik, 1995). Тя е възможност учебното съдържание да се прегрупира около основни понятия, методи и опорни фигури и опорни задачи. Последните да се обвържат с нагледни идеи, съдържащи обобщени признаци, така че да превърнат насочеността на вниманието и мислите в предусещане (нагласа).

Едно и също звукосъчетание може да предизвика различни реакции върху нервната система в зависимост от това към какви смислово-образни области се отнася, т.е. какви нервни пътища активира. Пряка връзка и взаимодействие между думите, като звуков код, са възможни по принцип, но не са определящи за процесите на мисленето (Lougia, 1979). Дори при усвояване на правилата на формалната логика човешкият мозък работи с образи, като синтезира и манипулира с пространствени модели на символите.

Да разгледаме две задачи. Първата от тях е естествена, несложна задача, която е от конкурс „Кенгуру“ за II клас. Тази задача не изисква познаването на формули или владението на определен алгоритъм, водещ до решение. Броненето е присъща дейност на всички хора и всеки може да пробва да я реши. Задачата се предлага на най-разнообразна аудитория: студенти от педагогически специалности, учители в началното училище, учители по математика в среден и горен курс, преподаватели във висше училище. Времето за решаване е 10 минути.

Задача 1.

Дадена е конструкция от четири кубчета на фигура. 1.1, върховете на които са отбелязани с точки. Пребройте колко точки има в конструкцията.



Фигура 1.1. Конструкция от четири кубчета

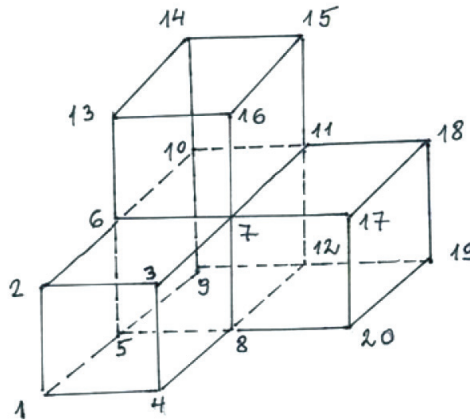
При решаване на задачата се наблюдава следното. Като че ли всички участници се насочват веднага след поставянето на задачата към решаването с разсъждения, които могат да се извършат върху основата на предварителен опит, с който те разполагат. Ако някой успее да реши задачата, той не търси други варианти, а най-често задава въпроса „Вярно ли е, че са ...?“. Повечето от решаващите задачата се опитват да начертаят невидимите части на конструкцията, да броят директно, без да използват редното значение на естествените числа.

Впечатлиха ни еднопосочността и ниските резултати при решаване на задачата. Сега представяме *нашия ретроспективен отчет* от нейното решаване. В първия момент леко се шокираме. Струва ни се, че е лесна, но като че ли ще ни забави (все пак задачата е от конкурс „Кенгуру“ за II клас). Я да си поиграем!

Вариант 1. Пресмятаме броя на върховете, 4 кубчета по 8 върха – 32. Опитваме се да отстраним повтарящите се, но не се получава. Разчленяваме тялото

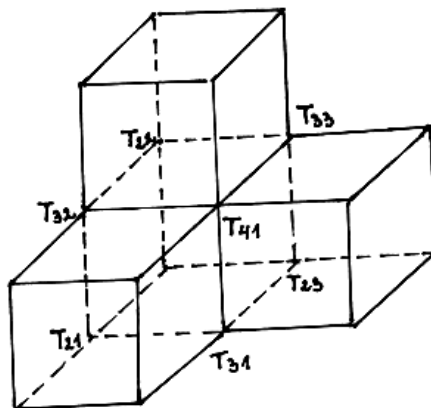
мислено на отделни кубове. Последователно ги долепяме един до друг (започна се от най-предния) и отчитаме само неброените точки: $8+4+4+4+4=20$. Преброихме ги още веднъж по същия начин, като почнахме от „невидимия“ куб, отново се получи същият резултат!

Вариант 2. След това решихме да ги преброим чрез номериране с последователни естествени числа. Добре е да въведем някаква последователност в номерирането, за да ги следим по-лесно, например като на фигура 1.2. Последното число е и техният брой. Отново се получи!



Фигура 1.2. Номериране на точките с последователни естествени числа

Вариант 3. Решихме да опитаме и първата си идея – от общия брой върхове 32 да се извадят повтарящите се. А колко са повтарящите се (фигура 1.3)?



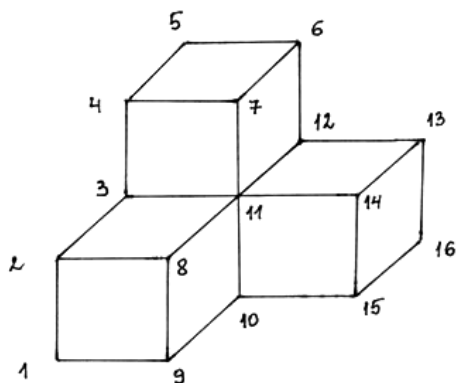
Фигура 1.3. Номериране на точките на съвпадения на върхове

Точките, при които има съвпадане на върхове, могат да се класифицират по следния начин:

- 1 точка, при която съвпадат четири върха – T_{41} ; т.е. отпадат 3;
 - 3 точки, при които съвпадат по три върха – T_{31}, T_{32}, T_{33} ; т.е. отпадат $3 \times 2 = 6$;
 - 3 точки, при които съвпадат по два върха – T_{21}, T_{22}, T_{23} ; т.е. отпадат $3 \times 1 = 3$.
- Следователно отпадат общо 12 точки и резултатът е: $32 - 12 = 20$ точки.

Вариант 4. По-късно в колективна работа открихме и „броене по равнини“. В равнината на основата има 8 точки. В успоредната равнина, в която лежат горните основи на трите куба, лежат също 8 точки. Най-отгоре има още 4 точки. Всичко са 20.

Вариант 5. Интерес представлява следното спонтанно решение, дадено от главен асистент (сега доцент), доктор по изобразително изкуство. „Видимите точки в равнината на листа са 16, а отзад, като обем, има още 4“. Шестнадесетте видими точки на листа са лесно броеими в следния порядък на фигура 1.4.



Фигура 1.4. Номериране на видимите точки

От „невидимия“ куб се виждат 4 точки. Тъй като върховете му са общо осем, следва, че има поне четири точки, които са невидими. Последното разсъждение отразява реализирането на мисленето като прогнозиране, като в голяма степен го вербализира.

Оценявайки всички решения, може да се каже, че първото се основава на важна инварианта в разглежданата конструкция. При добавяне на квадрат в конструкцията, който има една обща стена с нея, се добавят 4 точки, а ако има две общи стени – 2 точки. Това ни дава възможност да съставим други задачи, в които се добавят още кубчета на различни места в конструкцията, а броеенето се основава на направените заключения за получения общ брой точки.

От гледна точка на позициите, от които анализираме процеса търсене на решения, могат да се направят следните изводи.

Задачата предполага мислено деструктуриране на конструкцията и изисква да се „видят“ точките отзад (невидимите), т.е. е необходимо целенасочено предвиждане.

И при несложни задачи може да се използва множество от идеи за решаване. От страна на обучаващия обаче е необходима силна рефлексия върху дивергентността като особеност на уменията да се решават задачи.

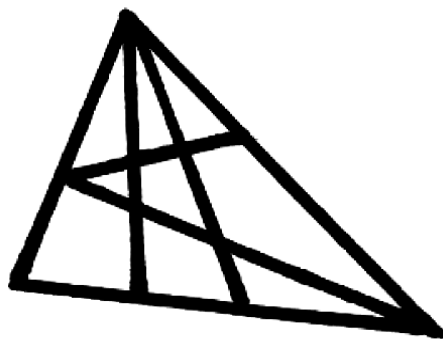
Често пълното му разгръщане е целесъобразно да се осъществи на последния етап от решаването, а и по-късно – след изучаване на нови методи, похвати и с цел поддържане и развитие на сензомоториката.

Констатира се слабо развитие на пространственото въображение на решаващите задачата. Обяснение може да се търси в слабата преносимост на уменията, които съдържат много възприятийни съставки; липса на стратегия за трениране на възприемчивостта.

Решаващите, като цяло, не се стремят да образуват множество от идеи или да изследват комбинации от елементи, а бързат (по-скоро спонтанно) да опитат една идея. Може да се окаже, че значението на особеностите, характеризиращи стила на решаване, е много по-голямо, отколкото предполагахме.

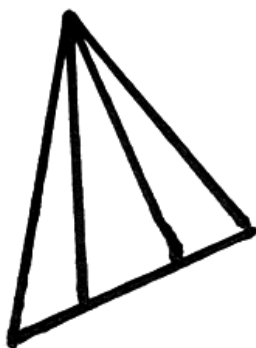
Задача 2.

Колко триъгълника има на рисунката на **фигура 2**?



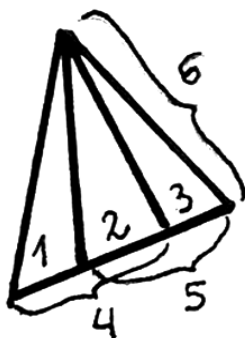
Фигура 2. Задача за преброяване на триъгълници в конструкция

Откриване на решение. Нека опитаме да броим систематично. Да обмислим дали можем чрез последователно наслагване, почвайки от върха, да броим и номерираме, за да можем да сравняваме и подобряваме стратегиите за броене. Да разгледаме най-напред горната част на рисунката (фигура 2.1), като закрим останалата част с ръка.



Фигура 2.1. Горна част на рисунката

Броим и номерираме триъгълниците в нея (фигура 2.2).



Фигура 2.2. Номериране на триъгълниците в горната част на рисунката

Чрез последователно наслагване на фигурата я откриваме общо три пъти на рисунката (фигура 2.3, фигура 2.4 и фигура 2.5).



Фигура 2.3. Местоположение №1 на фигурата върху рисунката



Фигура 2.4. Местоположение № 2 на фигурата върху рисунката



Фигура 2.5. Местоположение № 3 на фигурата върху рисунката

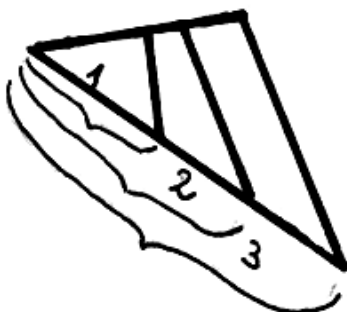
Също така откриваме, че има още две образуващи фигури, представени с фигура 2.6 и фигура 2.7 от типа, представен на фигура 2.8.



Фигура 2.6. Първа образуваща фигура



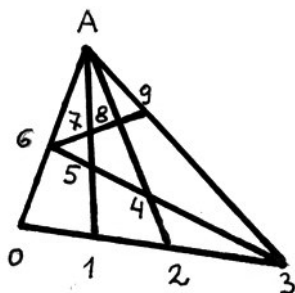
Фигура 2.7. Втора образуваща фигура



Фигура 2.8. Номериране на триъгълните в долната част на рисунката

Тогава общо за броя на триъгълниците на рисунката получаваме $6+6+6+3+3=24$.

За пълно комбиниране можем да използваме модела на фигура 2.9, където пресечните точки на отсечките са означени с буквата А и числата от 1 до 9.



Фигура 2.9. Номериране за пълно комбиниране

Усетът за броене, като основа на „**собствено геометричен метод**“ (най-вече като евристичен метод) се проявява чрез:

- подходящо структуриране на геометричната конструкция;
- конструиране на различни стратегии за броене;
- дивергентно създаване и опериране с пространствени образи.

Усетът за броене в голяма степен се проявява и при решаване на комбинаторни задачи (без използване на готови формули). Той се развива чрез определяне броя и записване на комбинаторните съединения. Един добър илюстриращ пример се съдържа в системата от комбинаторни задачи за естествените числа в помагалото по математика на М. Богданова и М. Темникова. Две от задачите са следните.

Задача 3. Напишете всички четирицифрени числа, за които сборът от цифрите на всяко от тях е 4. Колко са тези числа?

Задача 4. Колко са нечетните четирицифрени числа, които могат да се получат чрез разместване цифрите на числото 6372 (Bogdanova, Temnikova, 2008)?

При решаването на тези задачи е от значение какъв вид комбинаторно съединение се съставя – пермутации, комбинации или вариации. Важно е да се усвои начинът за тяхното образуване, вярно да се определят различните комбинаторни съединения и да се преброят.

Усетът за броене включва възприятието, което отразява обобщени количествени представи, и декомутиране на множество от обекти чрез предумещания и формиране на пространствени образи.

Заклучение

Тезата, че усетът за броене е в основата на математическите способности, е с висока степен на правдоподобност. Развитието на човека често се определя така: изграждане на маниер на работа, стил на учене, стил на решаване на задачи и проблеми, проява и развитие на усет. В дидактически план неговото развитие е цел и средство.

Да обобщим кои са предпоставките за проява на предумещането.

1. Наличие на **предварително познание** за някои свойства или характеристики на наблюдавания обект.

2. Познаване на възможни **логични връзки между свойствата и характеристиките** на обектите и как се проявяват те в друга ситуация, близка до наблюдаваната.

3. **Мислено проследяване на следствието**, възникващо в резултат на извършена въображаема манипулация върху системата от обекти (проследяване няколко хода напред).

4. **Познание за константни характеристики** на обектите и **познание за основни закони**, на които се подчинява поведението на обектите при настъпили събития.

Може да се каже, че усетът за броене се проявява и развива при:

- дивергентност при броене;
- конструиране на стратегии за броене и пренареждане;
- решаване на задачи за броене и пресмятане наум.

NOTES/БЕЛЕЖКИ

1. Кантор Г. https://bg.wikipedia.org/wiki/Георг_Кантор

2. Тужаров, Хр. (2007). Информационни системи, <http://tuj.asenevtsi.com/Inf%20sistem/I051.htm>

3. Naiser, V. (1976). Cognition and Reality. San Francisco.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Bogdanova, M., Temnikova, M. & Kaloyanova, Bl. (2008). *Zadachi po matematika za barzouspyavashti uchenici – IV klas*. Sofia: Bulvest 2000 [Богданова, М., Темникова, М., Калоянова, Бл. (2008). *Задачи по математика за бързоуспяващи ученици – IV клас*. София: Булвест 2000].
- Bogoyavlenska, D.B. (1982). *Patishta kam tvorchestvoto*. Sofia: *Narodna prosveta* [Богоявленска, Д.Б. (1982). *Пътища към творчеството*. София: *Народна просвета*].
- Luria, A. R. (1979). *Yazk i soznanie*. Moskva: Moskovskogo universiteta [Лурия, А. Р. (1979). *Язык и сознание*. Москва: Московского университета].
- Menchinskaya, N.A. (1995). *Psihologiya obucheniya arifmetike*. Moskva: Uchpedgiz [Менчинская, Н. А. (1995). *Психология обучения арифметике*. Москва: Учпедгиз].
- Minchev, B. (1991). *Situacii i umeniya*. Sofia: Sv. Kl. Ohridski [Минчев, Б. (1991). *Ситуации и умения*. София: Св. Кл. Охридски].
- Rasheva-Merdzhanova, Ya. (2005). *Multisenzorniya princip v obuchenieto i v zhivota*. Sofia: Sv. Kl. Ohridski [Рашева-Мерджанова, Я. (2005). *Мултисензорният принцип в обучението и в живота*. София: Св. Климент Охридски].
- Rayzhik, V.I. (1995). *Kak sdelat zadachnik*. Sank-Petrburg. [Рыжик, В.И. (1995). *Как сделать задачник*. Санкт-Петербург].
- Rey, B. (1996). *Les compétences transversales en question*. Paris: ESF.

ABOUT THE SENSE OF COUNTING

Abstract. The aim of this article is to analyze the sense of counting, its manifestation and development while building on the views of some authors regarding cognitive activity, anticipation, the interrelationship between logic and intuition, the use of visuals and the system approach.

The methods which are used imply appropriate selection of tasks in which the learning information is synthesized around basic concepts with regulatory functions. Two geometric tasks are used to demonstrate the results of the analysis. The first one requires the counting of dots in a construction. Several solutions have been offered which incorporate different approaches to finding the solution i.e. counting. The second task requires the counting of triangles in a geometric drawing. The discovery of the right solution has been described with an emphasis on rationality in counting, realized through the means of pre-search of repetitive structures. Detailed intermediate drawings reflecting the individual stages of arriving at a decision have been prepared for this task.

In addition, there are four extra Combinatorics tasks to be solved without the use of ready-made formulas.

What is important for these tasks is to master the algorithm that will facilitate counting. Finally, a conclusion has been drawn about the prerequisites for anticipation and the cases in which the sense of counting can be manifested and developed

✉ **Prof. Petar Petrov, DSc.**
Ms. Mima Trifonova, Assist. Prof.
Faculty of Education
Trakia University
Stara Zagora, Bulgaria
E-mail: pdp@dir.bg
E-mail: mm_trifonova@abv.bg