

ЗАНИМАТЕЛНИ ЗАДАЧИ ПО ТЕМАТА „КАРТИННА ГАЛЕРИЯ“

¹⁾Мирослав Стоимиров, ²⁾Ирина Вутова

¹⁾ Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“

²⁾ Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Предмет на статията е индуктивният подход за решаване на занимателни задачи, свързани с движение на светлинен лъч в правоъгълна галерия с огледални стени, в три от ъглите на която са поставени картини. Разгледани са редица случаи и са представени геометрични решения на три групи задачи. В резултат на геометрични построения са събрани данни (изследвани са галерии с различни размери), установени са закономерности и са формулирани изводи (хипотези). На основа на изведените заключения могат да бъдат прогнозираны траекторията на светлинния лъч, броят на неговите отражения и номерът на осветената картина. В методологическо отношение изследването е продължение на геометричния метод на Перелман за решаване на задачата на Поасон.

Keywords: picture; gallery; ray; reflection; rectangle; co-ordinate net; incomplete induction

1. Обща постановка на проблемната ситуация

Както е известно, основният инструмент в метода на Перелман (при решаване на задачата на Поасон) е „проследяване“ на траекторията на светлинен лъч, който се движи по късите диагонали на ромбоидна мрежа и се отразява от страните на успоредник с ъгъл от 60° (Lalchev, Varbanova & Stoimirov, 2017). По време на подготовката на цитираната статия възникна любопитна идея (предложена от проф. Върбанова) – вместо в ромбоидна да се изследва траекторията на светлинен лъч в квадратна мрежа. Конкретизацията на идеята доведе до аналогична ситуация, свързана с „осветлението“ на картинна галерия с правоъгълна форма. Изследването на въпросната проблемна ситуация стана предмет на настоящата разработка.

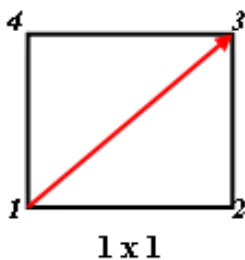
И така, да предположим, че картинна галерия има формата на правоъгълник, чиито дължина и ширина са естествени числа, а страните на правоъгълника са огледални. В три от ъглите на правоъгълника са поставени картини. Галерията се осветява от светлинен лъч, който се пуска в правоъгълника през

отвор през върха по ъглополовящата на четвъртия ъгъл. С други думи, лъчът сключва ъгъл от 45° със страните на правоъгълника, излизащи от същия връх. (Подобна ситуация възниква и при движението на топка в правоъгълна билиардна маса – (Jacobs, 1983). За краткост, в настоящото изследване описаната ситуация ще наричаме „Картинна галерия“.

За удобство да предположим, че правоъгълникът, който представя формата на галерията, е ориентиран успоредно на страните на страницата и да означим върховете му по следния начин: 1 – върха на долния ляв ъгъл, 2 – върха на долния десен ъгъл, 3 – върха на горния десен ъгъл, 4 – върха на горния ляв ъгъл. С други думи, правоъгълникът е означен с 1234.

Да предположим, че лъчът „влиза“ в галерията през върха на долния ляв ъгъл (1).

На фиг. 1 е показана траекторията на лъча в правоъгълник с размери 1×1 , т.е. в квадрат. Виждаме, че лъчът минава през квадрата, има две общи точки с контура (началото и края) и спира във върха на горния десен ъгъл (3).

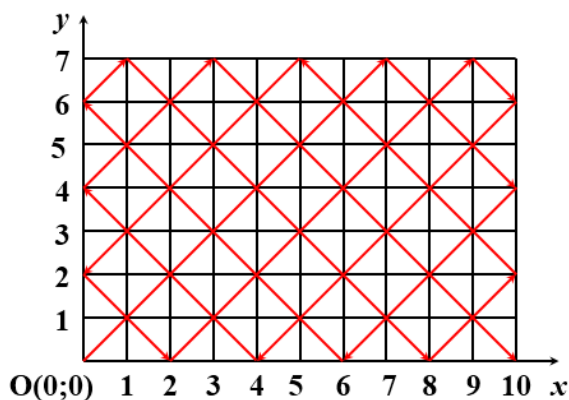


Фигура 1

Също така да допуснем, че правоъгълникът е покрит с квадратна мрежа, съставена от единични квадрати, ориентирани успоредно на страните, а самият правоъгълник служи за контур на мрежата. Тъй като движението на лъча се определя от физическия закон, според който ъгълът на отражение е равен на ъгъла на падане, то лъчът ще се движи по диагоналите на квадратите на мрежата, при достигане на стена във вътрешна точка ще се отразява от стената под ъгъл 45° и ще спира в някои от върховете 2, 3 или 4.

За удобство да предположим, че правоъгълникът е разположен така, че връх 1 е в началото на правоъгълна координатна система Ox , едната страна на правоъгълника е върху оста Ox , а другата страна е върху оста Oy и правоъгълникът е разположен изцяло в първи квадрант.

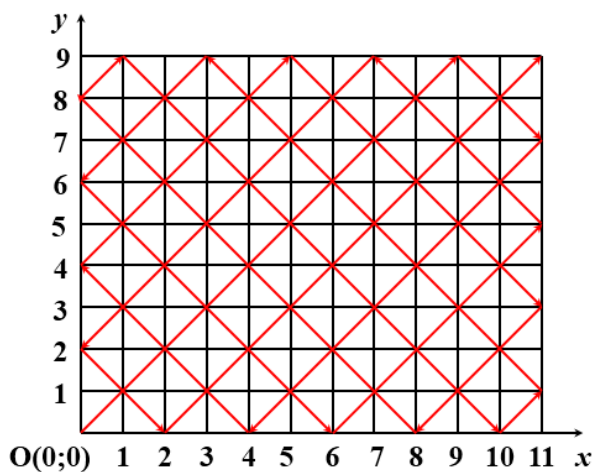
На фиг. 2 е показана траекторията на светлинен лъч в правоъгълник с размери 10×7 .



Фигура 2

Лъчът минава през 70-те квадратчета на мрежата, отразява се 15 пъти от стените на правоъгълника и спира във върха на долния десен ъгъл (2).

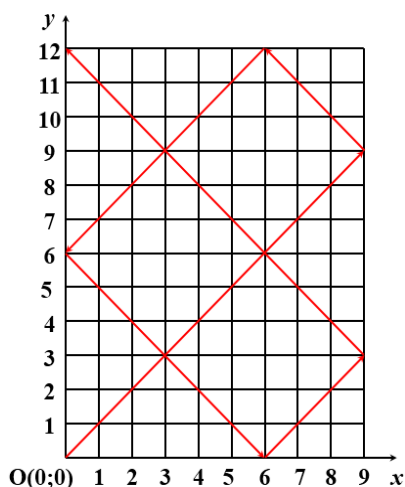
На фиг. 3 е показана траекторията на светлинен лъч в правоъгълник с размери 11x9.



Фигура 3

Лъчът минава през 99-те квадратчета на мрежата, отразява се 18 пъти от стените на правоъгълника и спира във върха на горния десен ъгъл (3).

На фиг. 4 е показана траекторията на светлинен лъч в правоъгълник с размери 9x12.



Фигура 4

Лъчът минава само през 36 от 108-те квадратчета на мрежата, отразява се 5 пъти от „стените“ на правоъгълника и спира във върха на горния ляв ъгъл (4).

От показаните случаи става ясно, че:

1) светлинният лъч спира във върх на някои от трите ъгъла на правоъгълника – долен десен (2), горен десен (3) или горен ляв (4);

2) светлинният лъч може да пресича всичките квадратчета на мрежата или да пресича само част от квадратчетата на мрежата;

3) светлинният лъч се отразява във всяка вътрешна „целочислена“ точка от „стените“ на правоъгълника или само в някои от тях, т.е. в едни от случаите светлинният лъч има толкова отражения, колкото са вътрешните целочислени точки на „стените“, а в други случаи има по-малко отражения.

2. Задачи, породени от ситуацията „Картинна галерия“

След като представихме общата постановка, можем да формулираме по-точно три от задачите (въпросите), които възникват от ситуацията „Картинна галерия“.

1) Ако са известни размерите (дължината и широчината) на картинната галерия, то бихме ли могли да предвидим (без да построяваме траекторията на лъча) коя от картините ще бъде осветена (до кой от ъглите ще достигне лъчът)? Ако това предвиждане е възможно, как то може да бъде направено?

2) Ако са известни размерите (дължината и широчината) на картинната галерия, то бихме ли могли да предвидим (без да построяваме траекторията на лъча) колко пъти лъчът ще се отрази от стените на галерията, докато достигне съответната картината? Ако това предвиждане е възможно, как то може да се направи?

3) Ако си представим картинната галерия като квадратна мрежа, съставена от единични квадратчета (квадратчета с дължина на страната 1), можем ли да предвидим броя на квадратчетата, през които ще премине лъчът, докато достигне съответната картина? Ако това предвиждане е възможно, как то може да се направи?

3. Предварителна подготовка за изследване на ситуацията „картинна галерия“. Елементарен правоъгълник

От случаите, които бяха разгледани в точка 1, се вижда, че в ситуацията „картинна галерия“ траекторията на лъча е доста „непредсказуема“ и отговорите на възникващите въпроси не са „очевидни“. За да достигнем до тях, ще направим експериментално изследване и ще приложим метода на непълната индукция.

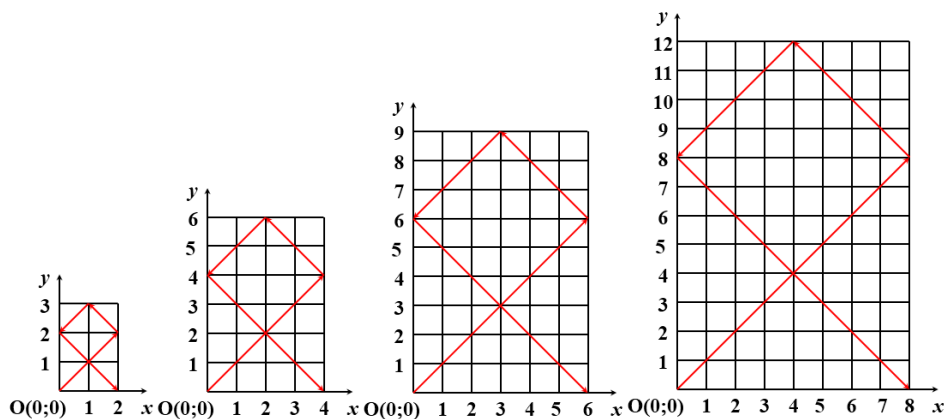
Отначало допускаме, че траекторията на лъча зависи от формата на галерията.

Изглежда естествено, че при галерии с различни размери, но с еднаква форма (подобни правоъгълници), траекториите имат също една и съща форма и лъчът спира съответно във връх на един и същ ъгъл.

Да проверим нашето предположение. За целта да разгледаме четири правоъгълника, които са с различни размери, но имат еднаква форма, т.е. правоъгълниците са подобни. Ще използваме, че подобните правоъгълници имат едно и също отношение на широчината и дължината. В случая отношението на мерните числа на размерите е 2:3.

Правоъгълниците и траекториите на лъча са представени на фиг. 5.

Правоъгълник с размери 2x3 $x = 2, y = 3$	Правоъгълник с размери 4x6 $x = 4, y = 6$	Правоъгълник с размери 6x9 $x = 6, y = 9$	Правоъгълник с размери 8x12 $x = 8, y = 12$
---	---	---	---



Фигура 5

От фиг. 5 става ясно, че траекториите и в четирите случая са подобни и лъчът спира във връх на един и същ ъгъл. В случая това е долният десен ъгъл (2).

Този опит ни дава основание при търсене на траекторията на лъча и ъгъла на спиране да „редуцираме“ правоъгълника (без да нарушаваме подобността) така, че да получим възможно „най-простия“ правоъгълник, подобен на първоначалния. Този правоъгълник ще наричаме **елементарен**. Ясно е, че елементарен правоъгълник е правоъгълник, на който дължината и широчината са взаимно прости числа. Всеки правоъгълник може да бъде „редуциран“ (в рамките на подобността) до елементарен. И това може да се постигне, като размерите x и y на първоначалния правоъгълник бъдат разделени съответно на техния най-голям общ делител. С други думи, ако x и y са размерите на първоначалния правоъгълник, а x_1 и y_1 са съответно размерите на елементарния правоъгълник, подобен на първоначалния, то

$$x_1 = x : \text{НОД}(x, y) \text{ и } y_1 = y : \text{НОД}(x, y).$$

В случая с правоъгълник 2×3 не е възможно „редуциране“, защото числата 2 и 3 са взаимно прости, т.е. $\text{НОД}(2, 3) = 1$, което означава, че правоъгълникът е елементарен.

В случая с правоъгълник 4×6 е възможно „редуциране“, защото числата 4 и 6 не са взаимно прости ($\text{НОД}(4, 6) = 2$), което означава, че правоъгълникът не е елементарен. За да се достигне до елементарен, подобен на дадения, е необходимо размерите на правоъгълника да бъдат разделени на числото 2, т.е. размерите на „редуцирания“ правоъгълник ще са съответно 2 и 3.

По аналогичен начин се разсъждава и в случая с правоъгълник 6×9 , както и в случая с правоъгълник 8×12 .

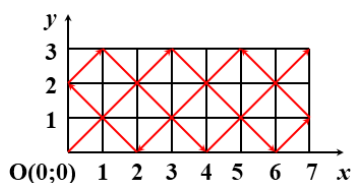
Коментар. От горните разсъждения достигаем до извода, че при търсене на решения на задачите за картинната галерия е целесъобразно изследването отначало да се съсредоточи върху множеството на елементарните правоъгълници, т.е. в множеството на правоъгълници, на които широчината и дължината са взаимно прости числа.

4. Траектории на светлинния лъч в елементарни правоъгълници

На фигурите 6а, 6б, 6в, 6г, 6д и 6е са показани траекториите на светлинен лъч в елементарни правоъгълници с размери съответно: 7×1 , 7×2 , 7×3 , 7×4 , 7×5 и 7×6 .

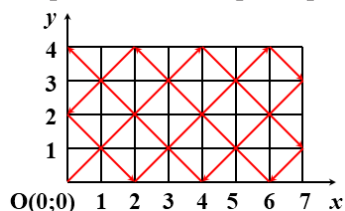


Правоъгълник с размери 7×3



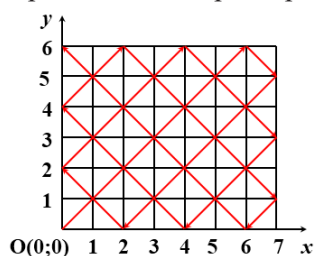
Фигура 6в

Правоъгълник с размери 7×4



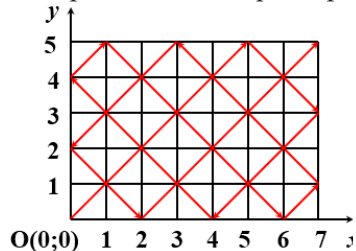
Фигура 6г

Правоъгълник с размери 7×5



Фигура 6д

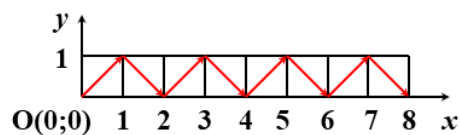
Правоъгълник с размери 7×6



Фигура 6е

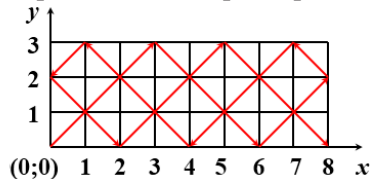
На фигури 7а, 7б, 7в и 7г са показани траекториите на светлинен лъч в елементарни правоъгълници с размери съответно: 8×1 , 8×3 , 8×5 , 8×7 .

Правоъгълник с размери 8×1



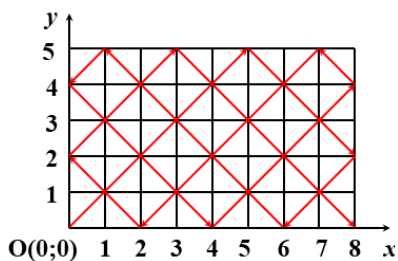
Фигура 7а

Правоъгълник с размери 8×3



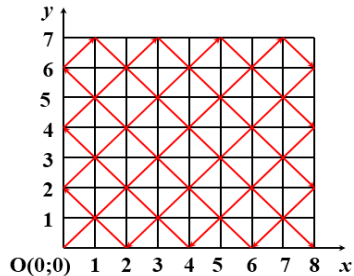
Фигура 7б

Правоъгълник с размери 8×5



Фигура 7в

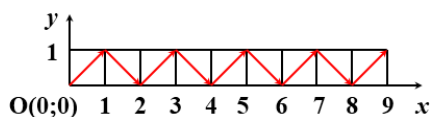
Правоъгълник с размери 8×7



Фигура 7г

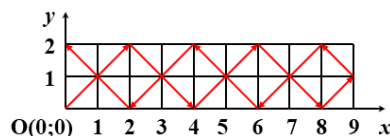
На фигурите 8а, 8б, 8в, 8г, 8д и 8е са показани траекториите на светлинен лъч в елементарни правоъгълници с размери съответно: 9×1 , 9×2 , 9×4 , 9×5 , 9×7 и 9×8 .

Правоъгълник с размери 9×1



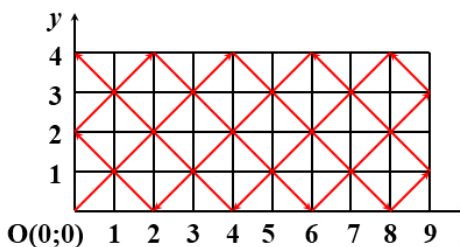
Фигура 8а

Правоъгълник с размери 9×2



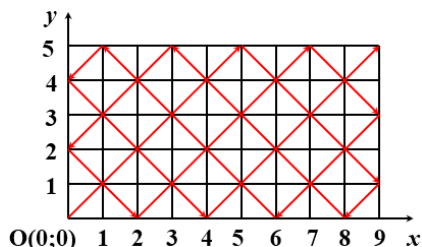
Фигура 8б

Правоъгълник с размери 9×4



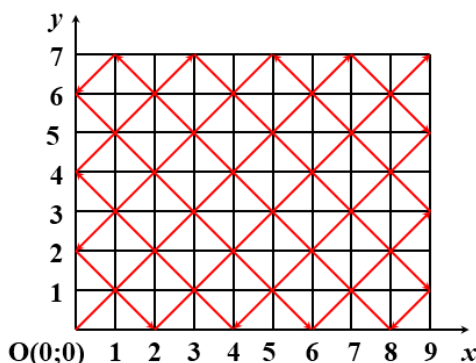
Фигура 8в

Правоъгълник с размери 9×5



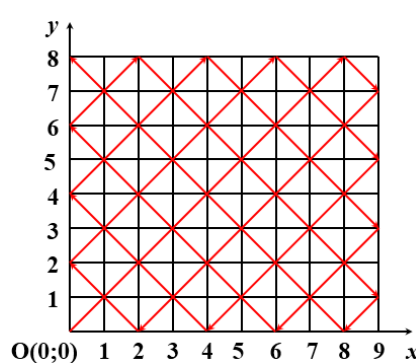
Фигура 8г

Правоъгълник с размери 9×7



Фигура 8д

Правоъгълник с размери 9×8



Фигура 8е

Да разгледаме представените фигури и да систематизираме резултатите.

На първо място, да потърсим номера на ъгъла, до който светлинният лъч достига. За целта и за по-голяма прегледност нека подредим в таблица точките, в които светлинният лъч спира своето движение.

Таблица за точките на спиране на светлинния лъч

Долен десен ъгъл (2)		Горен ляв ъгъл (4)		Горен десен ъгъл (3)	
Фигура	Размери	Фигура	Размери	Фигура	Размери
7а	8x1	6б	7x2	6а	7x1
7б	8x3	6г	7x4	6в	7x3
7в	8x5	6е	7x6	6д	7x5
7г	8x7	8б	9x2	8а	9x1
		8в	9x4	8г	9x5
		8е	9x8	8д	9x7

От таблицата за точките на спиране на светлинния лъч могат да се направят следните **изводи**.

1) Светлинният лъч спира в долния десен ъгъл (2) на правоъгълника тогава, когато размерът x (по оста Ox) е четно число и размерът y (по оста Oy) е нечетно число.

2) Светлинният лъч спира в горния ляв ъгъл (4) на правоъгълника тогава, когато размерът y (по оста Oy) е четно число и размерът x (по оста Ox) е нечетно число.

3) Светлинният лъч спира в горния десен ъгъл (3) на правоъгълника тогава, когато и двата размера x и y (дължината и ширината) са нечетни числа.

На второ място, ще потърсим закономерност за броя n на квадратчетата, през които минава светлинният лъч, докато достигне точката на спиране.

От фигурите се вижда, че във всички случаи лъчът минава през всичките квадратчета на правоъгълника. Нека тази информация представим отново таблично.

Таблица за броя на квадратчетата, през които минава лъчът

Фигура	6а	6б	6в	6г	6д	6е	7а	7б	7в	7г	8а	8б	8в	8г	8д	8е
Размери	7 1	7 2	7 3	7 4	7 5	7 6	8 1	8 3	8 5	8 7	9 1	9 2	9 4	9 5	9 7	9 8
Брой (n) квадратчета	7	14	21	28	35	42	8	24	40	56	9	18	36	45	63	72

От таблицата може да се направи **извод**.

Броят n на квадратчетата, през които минава лъчът, е равен на произведението на мерните числа x и y на правоъгълника, т.е.

$$n = x \cdot y$$

На трето място, ще потърсим закономерност за броя N на точките, в които лъчът се отразява, докато достигне точката на спиране.

Нека отново представим информацията таблично.

Таблица за броя на точките, в които лъчът се отразява

Фигура	6а	6б	6в	6г	6д	6е	7а	7б	7в	7г	8а	8б	8в	8г	8д	8е
Размери	7 1	7 2	7 3	7 4	7 5	7 6	8 1	8 3	8 5	8 7	9 1	9 2	9 4	9 5	9 7	9 8
Брой (N) на отраженията	6	7	8	9	10	11	7	9	11	13	8	9	11	12	14	15

От таблицата може да се направи **извод**.

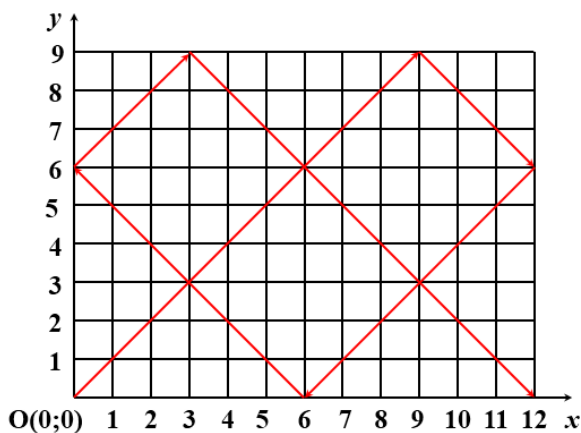
Броят N на точките, в които лъчът се отразява, докато достигне до крайната точка, е равен на сбора от мерните единици на размерите на правоъгълника, намален с числото 2, т.е.

$$N = x + y - 2.$$

5. Траектории на светлинния лъч в правоъгълници, които не са елементарни

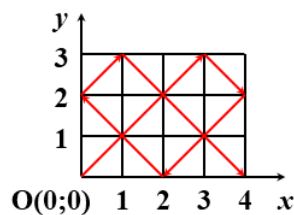
На фигури 9а и 9б са показани траекториите на светлинния лъч съответно в правоъгълник с размери 12х9 и в неговия редуциран вариант – елементарен правоъгълник с размери 4х3.

Правоъгълник с размери 12х9



Фигура 9а

Правоъгълник с размери 4х3



Фигура 9б

От фигурите 9а и 9б се вижда, че:

1) и в двата правоъгълника светлинният лъч има еднакви траектории и спира в една и съща точка (което впрочем се очакваше). В случая крайната

точка на лъча е върхът на долния десен ъгъл (2);

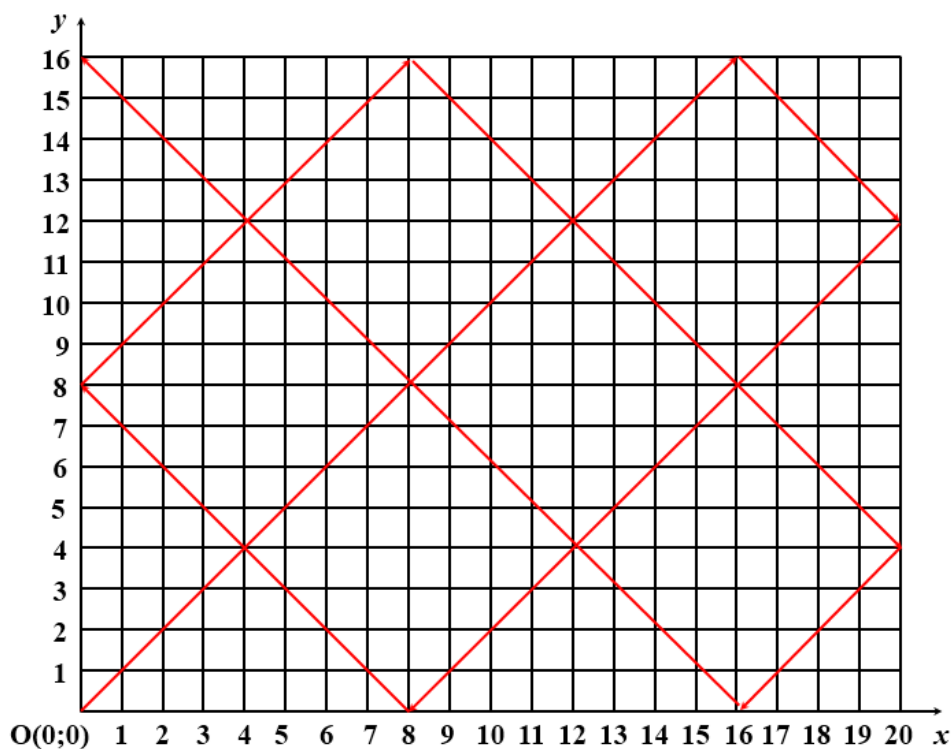
2) броят n на квадратчетата, през които лъчът преминава в правоъгълника 12×9 , е 36, а n_1 на квадратчетата в правоъгълника 4×3 е 12. Числото 36 е най-малкото общо кратно на числата 12 и 9 (както и числото 12 е най-малкото общо кратно на числата 4 и 3). С други думи, $n = \text{НОК}(12, 9)$ и $n_1 = \text{НОК}(4, 3)$;

3) броят N на точките на отражение на лъча от страните на правоъгълника 12×9 е равен на броя N_1 на точките на отражение на лъча от страните на правоъгълника 4×3 . С други думи $N = N_1$. В случая $N = N_1 = 5$.

(При това $5 = 4 + 3 - 2$, т.е. $N = x_1 + y_1 - 2$, където x_1 и y_1 са размерите на елементарния правоъгълник, подобен на първоначалния.)

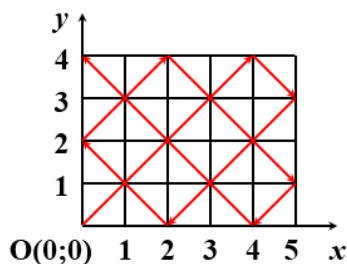
На фигури 10а и 10б са показани траекториите на светлинния лъч съответно в правоъгълник с размери 20×16 и в неговия редуциран вариант – елементарен правоъгълник с размери 5×4 .

Правоъгълник с размери 20×16



Фигура 10а

Правоъгълник с размери 5x4



Фигура 10б

От фигурите 10а и 10б се вижда, че:

1) и в двата правоъгълника светлинният лъч има еднакви траектории и спира в една и съща точка (което впрочем се очакваше). В случая крайната точка на лъча е върхът на горния ляв ъгъл (4);

2) броят n на квадратчетата, през които лъчът преминава в правоъгълника 20×16 , е 80, а n_1 на квадратчетата в правоъгълника 5×4 е 20. Числото 80 е най-малкото общо кратно на числата 20 и 16 (както и числото 20 е най-малкото общо кратно на числата 5 и 4). С други думи $n = \text{НОК}(20, 16)$ и $n_1 = \text{НОК}(5, 4)$;

3) броят N на точките на отражение на лъча от страните на правоъгълника 20×16 е равен на броя N_1 на точките на отражение на лъча от страните на правоъгълника 5×4 . С други думи $N = N_1$. В случая $N = N_1 = 7$.

(При това $7 = 5 + 4 - 2$, т.е. $N = x_1 + y_1 - 2$, където x_1 и y_1 са размерите на елементарния правоъгълник, подобен на първоначалния).

На фигури 11а и 11б са показани траекториите на светлинния лъч съответно в правоъгълник с размери 14×10 и в неговия редуциран вариант – елементарен правоъгълник с размери 7×5 .

От фигурите 11а и 11б се вижда, че:

1) и в двата правоъгълника светлинният лъч има еднакви траектории и спира в една и съща точка (което впрочем се очакваше). В случая крайната точка на лъча е върхът на горния десен ъгъл (3);

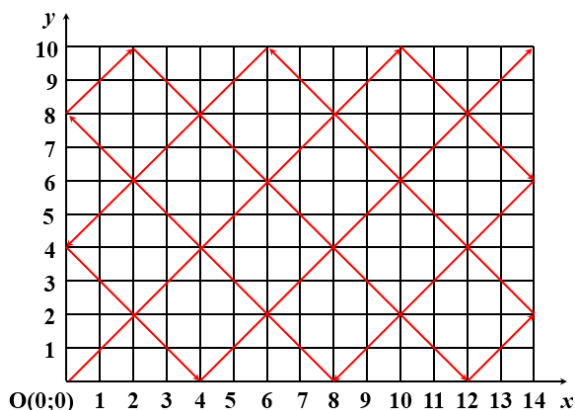
2) броят n на квадратчетата, през които лъчът преминава в правоъгълника 14×10 , е 70, а n_1 на квадратчетата в правоъгълника 7×5 е 35. Числото 70 е най-малкото общо кратно на числата 14 и 10 (както и числото 35 е най-малкото общо кратно на числата 7 и 5). С други думи $n = \text{НОК}(14, 10)$ и $n_1 = \text{НОК}(7, 5)$;

3) броят N на точките на отражение на лъча от страните на правоъгълника 14×10 е равен на броя N_1 на точките на отражение на лъча от страните на правоъгълника 7×5 . С други думи $N = N_1$. В случая $N = N_1 = 10$.

(При това $10 = 7 + 5 - 2$, т.е. $N = x_1 + y_1 - 2$, където x_1 и y_1 са размерите на

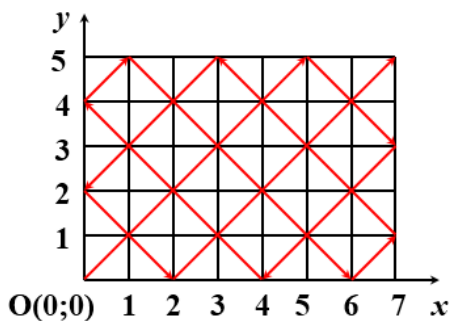
елементарния правоъгълник, подобен на първоначалния.)

Правоъгълник с размери 14×10



Фигура 11а

Правоъгълник с размери 7×5



Фигура 11б

Коментар

1) От направените разсъждения се достига до извода, че при решаване на задачите за траекторията на светлинния лъч в правоъгълник, който не е елементарен, е целесъобразно отначало **правоъгълникът да бъде „редуциран“ до елементарен**. По този начин се намират решенията на задачата за крайната точка на лъча и задачата за броя на отраженията – първа и трета задача.

2) Втората задача – за броя на квадратчетата, през които минава лъчът, докато достигне крайната точка, се решава чрез намиране на **най-малкото общо**

кратно на мерните числа на правоъгълника.

6. Още един вариант на алгоритъма за предвиждане на траекторията на светлинния лъч

Крайната точка от траекторията на светлинния лъч в правоъгълник, който не е елементарен, може да бъде предвидена и без да се прави „редукция“ на правоъгълника до елементарен. След като се вземат предвид някои съображения, свързани с четността на мерните числа на дължината и широчината на правоъгълника и удвоения най-голям общ делител на тези числа, се достига до извода, че:

1) лъчът ще достигне върха на долния десен ъгъл (2) тогава и само тогава, когато при делението на числото x на удвоения НОД(x , y) се получава цяло число, т.е. числото x е кратно на удвоения най-голям общ делител на числата x и y ;

2) лъчът ще достигне върха на горния десен ъгъл (3) тогава и само тогава, когато при делението на числото x и на числото y на удвоения НОД(x , y) не се получава цяло число, т.е. числата x и y не са кратни на своя удвоен най-голям общ делител. Като частен случай, може да се каже, че ако броят на квадратите по дължина и по широчина са две взаимно прости нечетни числа, то лъчът ще достигне до горния десен ъгъл (3);

3) лъчът ще достигне върха на горния ляв ъгъл (4) тогава и само тогава, когато при делението на числото y на удвоения НОД(x , y) се получава цяло число, т.е. числото y е кратно на удвоения най-голям общ делител на числата x и y .

7. Заключение и бележки

В настоящата разработка учителят може да открие конкретен вариант за дидактическо представяне на метода на непълната индукция при прилагане на изследователски подход в обучението по математика. Темата може да намери място в курсовете по занимателна математика за студенти – бъдещи учители.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Jacobs, H. (1983). *For all who think they don't like mathematics*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Джейкъбз, Х. (1983). *За всички, които мислят, че не обичат математиката*. София: Наука и изкуство].
- Grozdev, S. (2013). *Synergetic strategies in problem solving. The synergetic approach in Higher education on examples from the Didactics of mathematics*. VelikoTarnovo: Slovo. [Гроздев, С. (2013). *Синергетични стратегии за решаване на задачи. Синергетичният подход във висшето образование върху примери от „Дидактика на математи-*

ката“. Велико Търново: Слово].

- Lalchev, Z., Varbanova, M. & Stoimirov, M. (2017). Poisson's amusing problems and Perelman's method for their solution and study. *Mathematics and Informatics*, 1. 17 – 49. [Лалчев, З., Върбанова, М. & Стоимиров, М. (2017). Занимателните задачи на Поасон и методът на Перелман за тяхното решаване и изследване. *Математика и информатика*, 1. 17 – 49].
- Lalchev, Z. (2009). *Mathematics in problems and methods. Book I for the primary school teacher*. Sofia: St. Climent Ohridski. [Лалчев, З. (2009). *Математика в задачи и методи. Книга I за учителя в началните класове*. София: Св. Климент Охридски].

ENTERTAINING PROBLEMS ON THE TOPIC „PICTURE GALLERY“

Abstract. The topic of the article is the inductive approach to solve entertaining problems, connected with the motion of a light ray in a rectangular gallery with mirror walls and pictures in three of its corners. Several cases are considered and geometric solutions of three groups of problems are presented. Data is collected as a result of geometric constructions (galleries with different dimensions are examined), regularities are established and conclusions (hypotheses) are formulated. What are prognosticated on the base of the derived conclusions are the trajectory of the light ray, the number of its reflections and the number of the illuminated picture. In methodological aspect the study is a continuation of the Perelman's geometric method for solving the Poisson's problem.

✉ **Mr. Miroslav Stoimirov, PhD student**

Faculty of Mathematics and Informatics
University of Veliko Tarnovo
3A, Arh. G. Kozarev Blvd.
5000 Veliko Tarnovo, Bulgaria
E-mail: mstoimirov@mail.bg

✉ **Dr. Irina Voutova, Assist. Prof.**

Faculty of Mathematics and Informatics
University of Sofia
5, James Boucher Blvd.
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: irinazv@abv.bg