

ЗАДАЧИ ЗА ФОРМИРАНЕ НА ПОНЯТИЯ С ДИАГРАМИ НА ВЕН С ПЕТ МНОЖЕСТВА

Тони Чехларова¹⁾, Койя Чехларова²⁾

¹⁾ *Институт по математика и информатика
Българска академия на науките – София (България)*

²⁾ *Университет по библиотекознание и информационни технологии
– София (България)*

Резюме. Представени са задачи за формиране на понятия чрез диаграми на Вен с 5 множества. За визуализация на диаграма на Вен с 5 множества е използвана ротационна симетрия на крива. Акценти са поставени върху броя на решенията и обратните задачи. Обсъдена е ролята на компютърните модели за съставянето, решаването и разпространението им, включително използването им в музеи.

Ключови думи: диаграми на Вен; ротационна симетрия; GeoGebra; понятия; STEAM; визуализация; игровизация; добавена реалност

1. Въведение

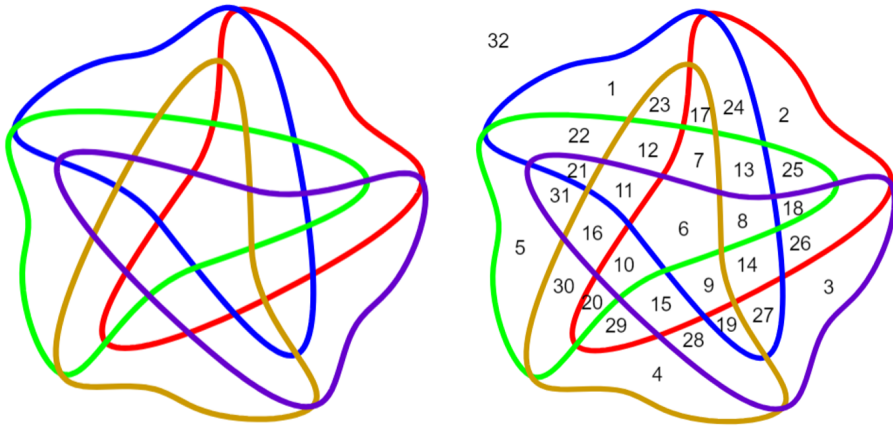
Интересът към диаграмите на Вен (Venn 1880) не намалява, особено във връзка с представяне на големи данни. Изследвания са насочени както към търсене на нови визуализации, така и към дигитални реализации (Chen & Boutros 2011; Edwards 1998; Lin et al. 2016).

Диаграмите на Вен са полезно средство за онагледяване на връзката между понятия, за решаване на някои видове задачи, за онагледяване на идеи. В (Chehlarova 2024) са представени примери за началното училище с диаграми на Вен с 2 или 3 множества и резултати на участници от 3. и 4. клас в онлайн състезание „VIVA Математика с компютър“ (Kenderov et al. 2021), организирано от Института по математика и информатика на Българската академия на науките. Примери с диаграми на Вен с 2 или 3 множества за началното училище има и в (Kirova 2016), както и в (Lalchev et al. 2016) в контекста на подготовка на учители.

В тази статия са представени задачи с диаграми на Вен с 5 множества за формиране на понятия. За визуализация на диаграма на Вен с 5 множества е използвана ротационна симетрия на крива, по идеята на Грюнбаум (Grünbaum 1975). Така се използват криви, вътрешността на които съдържат елементите на конкретно множество, а външната страна съдържа елементите, които не са от това множество.

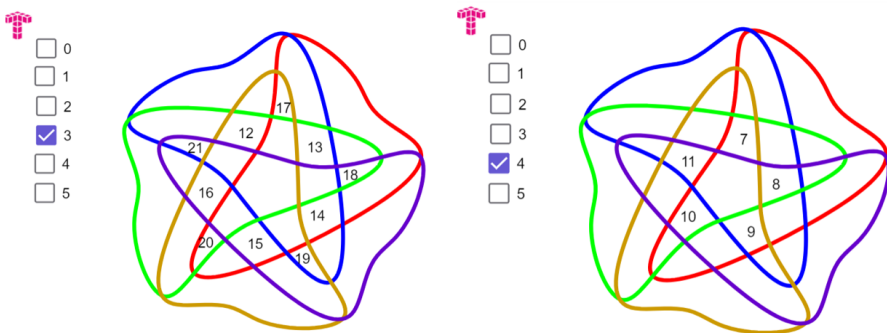
2. Задачи с диаграми на Вен

Задачите са разработени с GeoGebra (Hohenwarter et al. 2008) и са предоставени за свободен достъп^{1,2}. На фиг. 1 е показан моделът с пет криви, който ще използваме. Петте криви са оцветени с различни цветове. Те разделят равнината на 32 области.



Фигура 1. Модел на диаграма на Вен с 5 множества

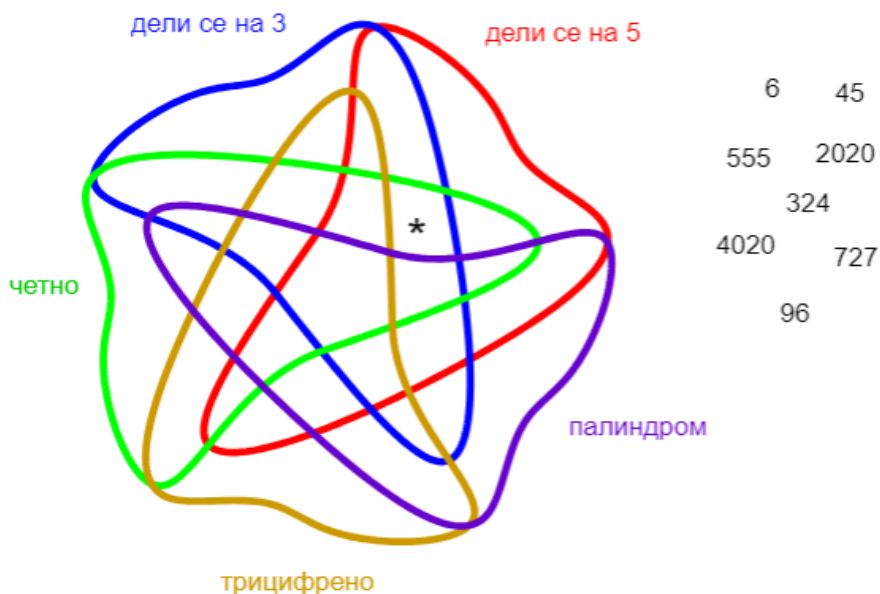
На фиг. 2 са изобразени областите, които са сечения на 3 и съответно на 4 множества в разглеждания модел на диаграмата на Вен с 5 множества.



Фигура 2. Области, сечения на 3 (съответно на 4) множества в модела на диаграма на Вен с 5 множества

Задача 1. В областта, оградена от зелената крива, трябва да се поставят четни числа, в оградената от синята крива – числа, които се делят на 3, от червената крива – които се делят на 5, от лилавата крива –

числа палиндром, от жълтата крива – трицифрени числа. Кое от числата 6, 45, 96, 324, 555, 727, 4020 трябва да се постави в частта, маркирана със звездичка?



Фигура 3. Диаграма на Вен за задача 1

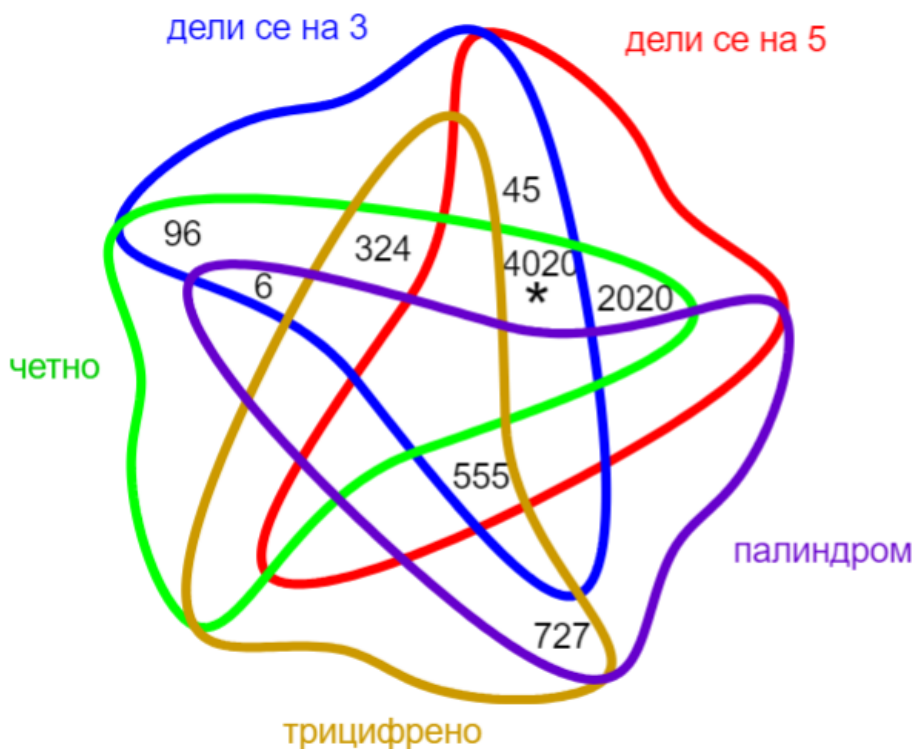
В GeoGebra файла (фиг. 3) петте криви са с означени наименования на съответните множества, поставени са и дадените числа (записани като текстове), затова е достатъчно да се зададе въпросът „Кое от числата вдясно трябва да се постави в областта, маркирана със звездичка?“. При използване на дигиталния модел на задачата числата вдясно могат с влачене да се преместват и поставят в съответната област. Звездичката е вътрешна за кривите в зелен, син и червен цвят и външна за лилавата и жълтата крива. В областта, маркирана със звездичка, трябва да се поставят числа, които са четни, делят се на 3, делят се на 5, не са палиндром и не са трицифрени. Разбира се, може да се прави проверка за всяко от дадените числа, но като се има предвид условието, подходящо е да се отделят числата, които не отговарят на поне едно от тези условия. Например могат да се отстранят нечетните числа; тези от останалите,

които са трицифрени; тези от останалите, които не се делят на 3; тези от останалите, които не се делят на 5. В случая остава само едно число, за което е изпълнено и последното изискване – не е палиндром.

Тук обратна връзка решаващите могат да получат с кликване върху надписа „отговор“, в резултат на което ще бъде направено преместване в е-страницата до запис на търсеното число.

Аплетът може да се използва допълнително, например могат да се поставят числата в съответните области (фиг. 4). Такова е условието на следващата:

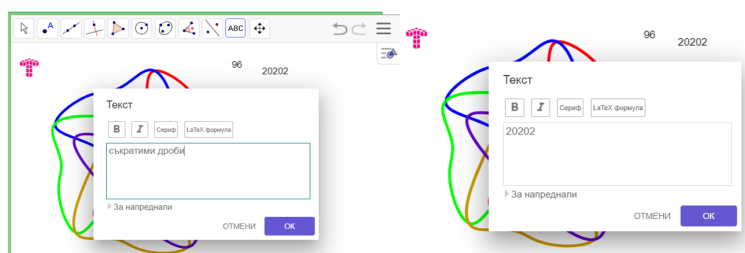
Задача 2. „Поставете всяко от числата вдясно в съответната област“.



Фигура 4. Допълнителна работа с диаграмата на Вен за задача 2

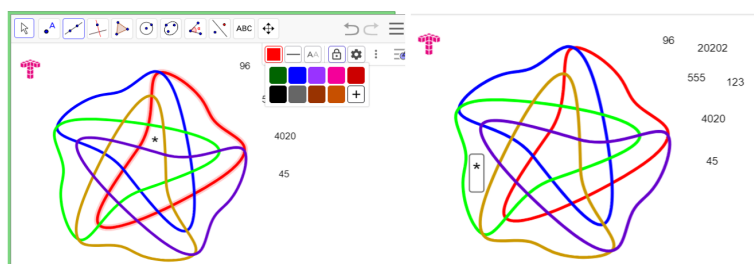
Аплетът в задача 3 е във формат, който позволява съставяне на задачи. Очаква се да се запишат новите множества както и обектите, за които ще се иска да бъдат поставени в съответната област. За целта има възможност:

- да се въвеждат нови текстове или да се редактират вече въведени (фиг. 5);



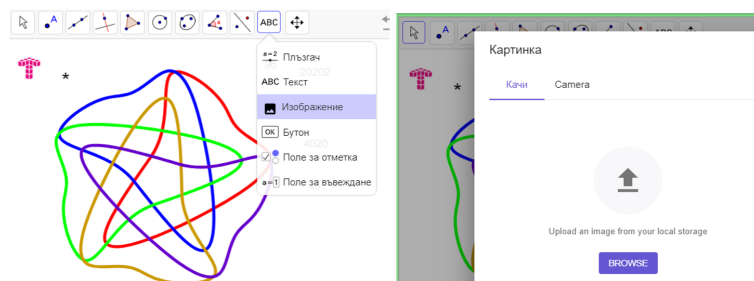
Фигура 5. Съставяне на задачи: текст

- да се променят цветовете, да се преместват обекти (фиг. 6);



Фигура 6. Съставяне на задачи: цвят и промяна на позиция

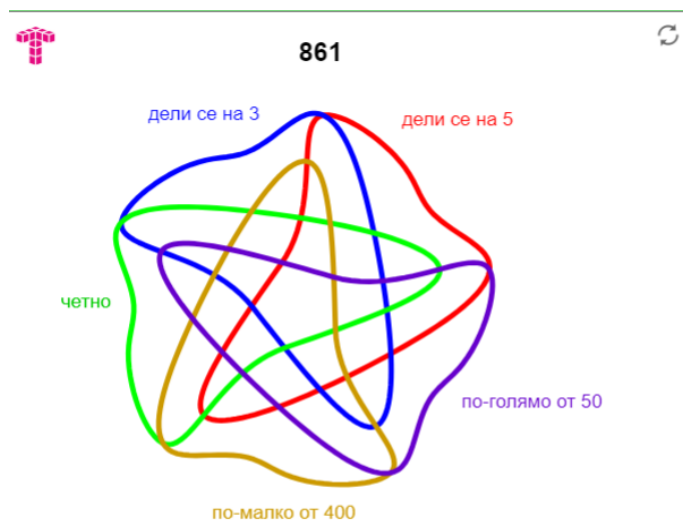
- да се вмъкват изображения (фиг. 7).



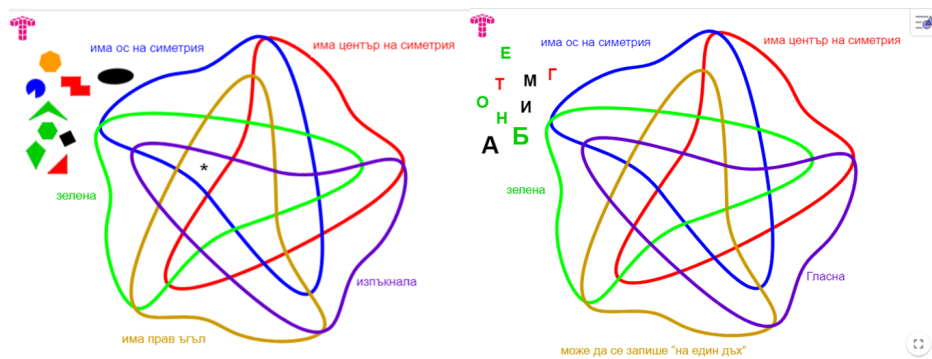
Фигура 7. Съставяне на задачи: вмъкване на изображения

Добра възможност е и създаването на задачи с диаграми на Вен за самопроверка и проверка, при които автоматично се генерират конкретните

елементи от дадено множество или от предварително създадени списъци (Chehlarova 2020). В следващия аплет от темата по случаен начин се генерира едно естествено число от 1 до 2024. С бутона за обновяване на файла се генерират множество примери на задача 4 – с фиксирани пет множества и изискване даденото число да се постави в съответната му област (фиг. 8).



Фигура 8. Диаграма на Вен за задача 4: генериране по случаен начин

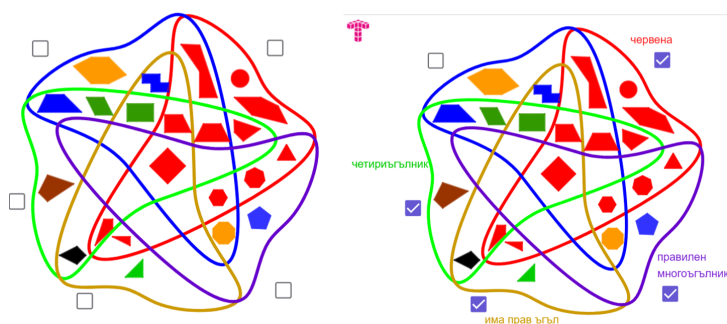


Фигура 9. Примери с фигури с акцент симетрия

Когато обектите са фигури, при задаване на задачата с *GeoGebra* файл, за преценка за равенство на отсечки или ъгли и определяне на

вида на всеки от дадените триъгълници може да се използва квадратната мрежа, лентата с инструменти за показване на дължини на отсечки и градусни мерки на ъгли и други (фиг. 9).

Подходящо е да се използват и обратни задачи с диаграми на Вен – при фиксирано запълване с конкретни обекти се търсят множествата. Например Задача 5 е с условие „Кои са петте множества?“ (фиг. 10).

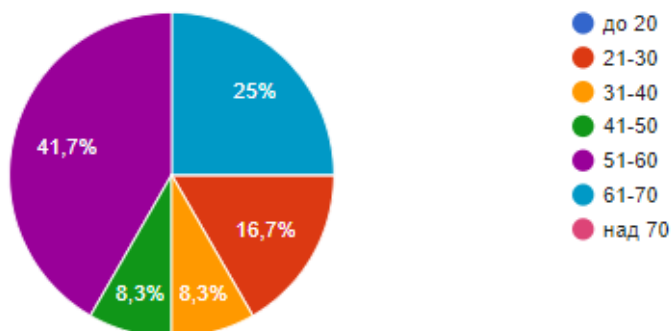


Фигура 10. Обратна задача с диаграми на Вен

Обратна връзка за задача 5 се получава чрез отметките за показване/скриване, в случая на наименованието на всяко от петте множества.

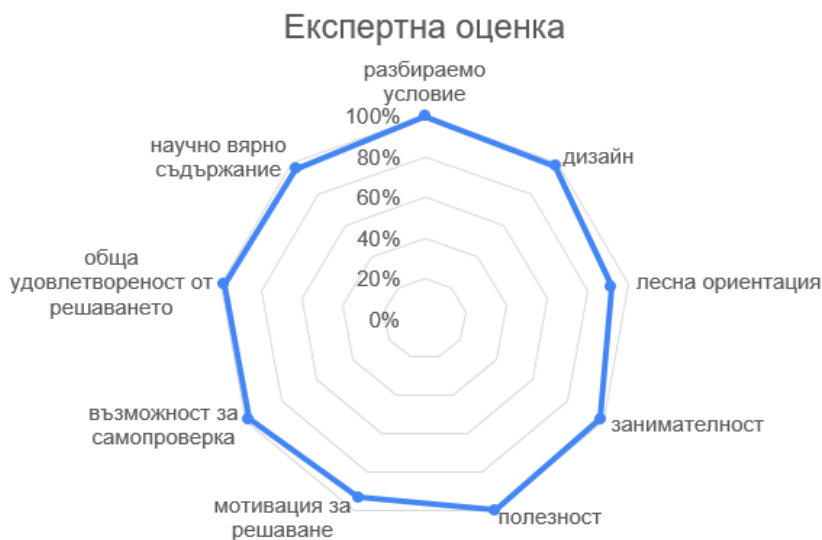
3. Експертна оценка

Направена бе анкета с 12 експерти – учители и учени. Възрастовата характеристика на експертите е отразена на фиг. 11.



Фигура 11. Възрастова характеристика на анкетираните експерти

Резултатите от оценките на идеята и конкретните материали с диаграми на Вен с 5 множества са представени на фиг. 12.



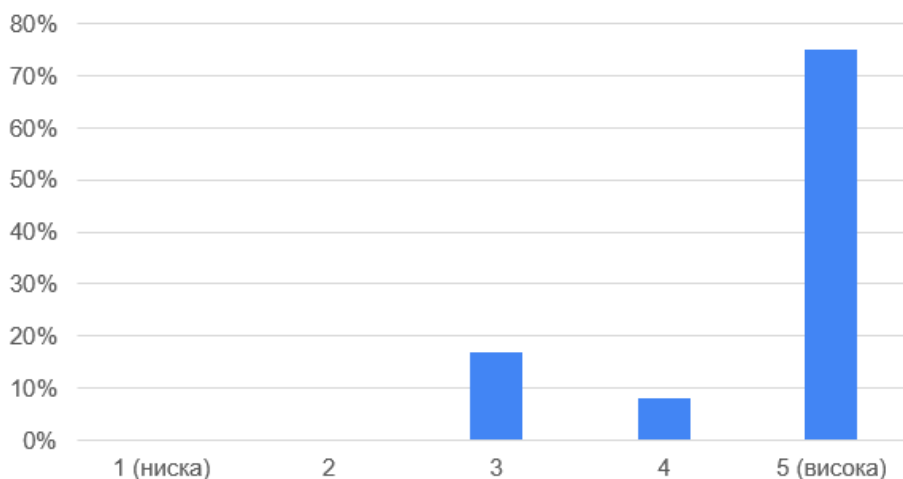
Фигура 12. Резултати от експертна оценка

Експертна оценка на различни образователни ресурси е търсена по аналогични критерии (Chehlarova 2021). Това е най-високият резултат, получаван при такива проучвания на авторите до момента. Малко колебания има единствено при оценка на „лесна ориентация“ и „мотивация за решаване“. Причината за първото може би е, от една страна, съдържанието на конкретните задачи, а от друга – оценяване на необходимостта от продължително съсредоточаване, работа с пет критерия и др., които са от недостатъчно развитите умения за сегашното поколение ученици. Точно това обаче прави решаването на такива задачи полезно в няколко направления.

На въпроса „Бихте ли споделяли такива задачи с други?“, 100% от анкетираните експерти са отговорили с „да“. Такъв е отговорът им и на въпроса „Бихте ли съставяли такива задачи? Защо?“, като уточнението им в някои случаи е свързано с общата идея на задачата, а в други – с дигиталната реализация: „Бих, защото съдържанието е представено по красив, интригуващ и занимателен начин. Интересно ми е.“; „Да, защото учениците, имали възможност да работят с дигитален вариант на задачи, предпочитат този вариант.“; „Да, ако имам достатъчно ученици, които да

са мотивирани да ги решават.“; „Подобни задачи биха мотивирали учениците да експериментират, изучават и създават примери по интересен за тях начин.“; „Чрез тях се развиват изследователският подход и практическото приложение на знанията.“; „Занимателни и интересни задачи се получават. Особено са полезни в края на годината за затвърждаване на знанията.“; „Да, защото решаването им води до развитие на логическото мислене и овладяване на понятията обединение, сечение и изваждане на множества.“; „Изключително подходящи са за онагледяване на удовлетворяване на повече от две условия, които се изискват в някои задачи“. Тези резултати отново подчертават високата оценка на експертите, а ето и някои от техните коментари: „Много е красиво и ми харесва, че кръговете приличат на звездички.“; „Много интересно... решавах на един дъх.“; „Поздравления! И за идеята, и за реализацията ѝ!“; „Задачите са много хубави. Приложими са и в други предметни области.“; „Разглеждане на такъв тип задачи трябва да започне още в началните класове“.

Ще отбележим, че 75% от анкетираните са се самооценили с най-висока степен на опитност за решаване на дигитално зададени задачи (фиг. 13), както и че преобладават специалисти с поне две области на компетентност, едната от които е математика или информационни технологии.

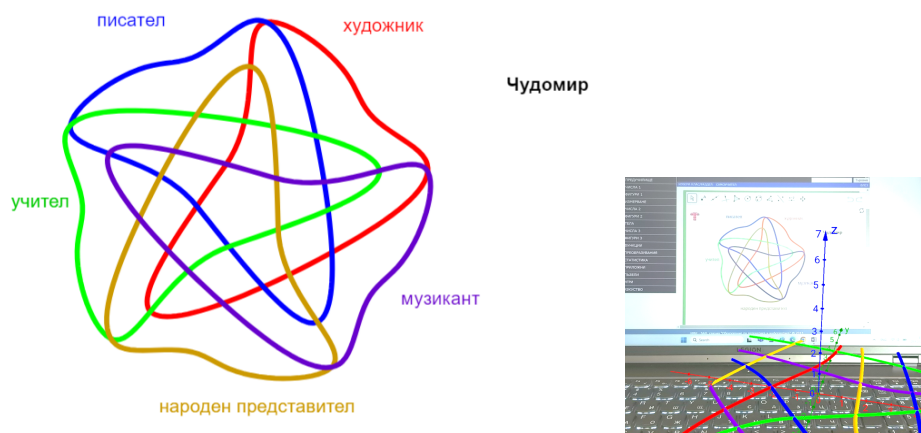


Фигура 13. Самооценка на експертите относно опитност с дигитално задавани задачи

4. Дискусия

Както решаването, така и съставянето на задачи с диаграми на Вен с 5 множества са подходящи дейности за учениците. Значението е не само за знанията от областта на конкретните множества, а за компетентността за разчитане и създаване на схеми, за умението за прилагане на някои логически знания.

Във връзка с разширяване на условията за потребителското изживяване и постигане на по-висока степен на удовлетвореност при посещение в музеи (Kovatcheva 2022) е подходящо да се да се използват такива задачи. Осигуряването на интерактивност ще улесни реализирането на образователната функция на музеите. Има смисъл от включването на такава задача и непосредствено преди посещението, и в края на посещението, за да се направи самооценка. Например в литературно-художествения музей „Чудомир“ в Казанлък може да се използва задача като на фиг. 14, включително и с добавена реалност.



Фигура 14. Задача за посетителите на Литературно-художествения музей „Чудомир“

Така се осигурява условие за рефлексия и се очаква осмисляне и трайно запаметяване на основни идеи и факти.

В контекста на STEAM образованието и използването на горен индекс за означаване на броя на областите, които се включват (Chehlarova 2024a), тук се реализира STEAM⁽²⁾, или STEAM⁽³⁾, а при задачи от други предметни области – и STEAM⁽⁴⁾ или STEAM⁽⁵⁾, а в аналогичната на разглежданата тук диаграма на Вен с пет области, която е използвана за визуализиране на STEAM, ще бъде оцветена една съответните области.

БЕЛЕЖКИ

1. <https://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=492>
2. <https://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=493>

REFERENCES

- CHEHLAROVA, T., 2020. Resources For Self-Assessment In The Virtual Mathematics Laboratory. *Pedagogika-Pedagogy*, vol. 92, no. 2, pp. 168 – 179 (in Bulgarian). ISSN 0861-3982.
- CHEHLAROVA, T., 2021. Auxiliary Files For Tasks With Symmetries Of A Square In The Online Competition “Viva Mathematics With Computer”. *Symmetry: Culture and Science*, vol. 32, no. 4, Symmetrion, pp. 479 – 487. <https://journal-scs.symmetry.hu/abstract/?pid=913>
- CHEHLAROVA, T., 2024. Venn Diagrams Tasks for Concept Formation in the Elementary School. *Pedagogical Forum*. vol. 12, no. 2, pp. 36 – 44, Trakia University – DIITT, ISSN 1314-7986 (in Bulgarian). doi: 10.15547/PF.2024.010.
- CHEHLAROVA, T., 2024a. Visualization of steam with Venn diagrams. *Symmetry: Culture and Science*. vol. 35, no. 2, pp. 119 – 125. ISSN 0865-4824 (Print), ISSN 2226-1877 (Online).
- CHEN, H., BOUTROS, P., 2011. VennDiagram: a package for the generation of highly-customizable Venn and Euler diagrams in R. *BMC Bioinformatics*, vol. 12, no. 35, pp. 1 – 7. ISSN: 1471-2105. doi: 10.1186/1471-2105-12-35
- EDWARDS, A., 1998. Seven-set Venn diagrams with rotational and polar symmetry, *Combinatorics, Probability, and Computing*, vol. 7, no. 2, pp. 149 – 52, ISSN 0963-5483 (Print), 1469-2163 (Online).
- GRÜNBAUM, B., 1975. Venn Diagrams and Independent Families of Sets. *Mathematics Magazine*, vol. 48, no. 1, pp. 12 – 23, Printed ISSN: 0025-570X, Online ISSN: 1930-0980. doi: 10.1080/0025570X.1975.11976431
- HOHENWARTER, M., HOHENWARTER, J., KREIS, Y., LAVICZA, Z., 2008. Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. *International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico.
- KENDEROV, P., CHEHLAROVA, T., GACHEV, G., 2021. Online Competition “VIVA Mathematics with Computer”. *Mathematics and Informatics*, vol. 64, no. 1, pp. 36 – 51 (in Bulgarian).
- KIROVA, G., 2016. Euler-Venn diagrams and Carroll diagrams in elementary mathematics education. *Education and technology*, pp. 235 – 239 (in Bulgarian). ISSN 1314-1791 (Print) ISSN 2535-1214 (Online).

- KOVATCHEVA, E., 2022. *Dialogues At Home*. Propeller Publisher (in Bulgarian). ISBN 978-954-392-692-3, ISBN 978-954-392-693-0 (e-book).
- LALCHEV, Z., VARBANOV, M., VOUTOVA, I., DOUSHKOV, I., 2016. Euler-Venn Diagrams or MZ-Cards in Primary School Mathematics. *Mathematics and Informatics*. vol. 59, no. 2, pp. 143 – 169 (in Bulgarian). ISSN 1310–2230 (Print), 1314–8532 (Online).
- LIN, G., CHAI, J., YUAN, S., MAI, C., CAI, L., MURPHY, R.W., ZHOU, W., LUO, J., 2016. VennPainter: A Tool for the Comparison and Identification of Candidate Genes Based on Venn Diagrams. *PLoS ONE*, vol. 11, no. 4, e0154315. ISSN 1932-6203. doi: 10.1371/journal.pone.0154315
- VENN, J., 1880. On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings, *Philosophical Magazine Series 5*, vol. 10, no. 59, pp. 1 – 18. doi: 10.1080/14786448008626877

ЛИТЕРАТУРА

- КЕНДЕРОВ, П., ЧЕХЛАРОВА, Т., ГАЧЕВ, Г., 2021. Онлайн състезание „VIVA Математика с компютър“. *Математика и информатика*, т. 64, № 1, стр. 36 – 51. ISSN: 1310–2230 (Print), 1314–8532 (Online). <https://doi.org/10.53656/math2021-1-3-onl>
- КИРОВА, Г., 2016. Диаграми на Ойлер-Вен и диаграми на Карол в обучението по математика в началните класове. *Образование и технологии*, стр. 235 – 239. ISSN 1314-1791 (Print), ISSN 2535-1214 (Online).
- КОВАЧЕВА, Е., 2022. *Разговори у дома*. Издателство Пропелер, София. ISBN 978-954-392-692-3, ISBN 978-954-392-693-0 (e-book).
- ЛАЛЧЕВ, З., ВЪРБАНОВА, М., ВУТОВА, И., ДУШКОВ, И., 2016. Ойлер-Вен диаграми или MZ-карти в началната училищна математика. *Математика и информатика*. т. 59, № 2, стр. 143 – 169. ISSN 1310–2230 (Print), 1314–8532 (Online).
- ЧЕХЛАРОВА, Т., 2020. Ресурси за самопроверка във Виртуалния училищен кабинет по математика. *Педагогика*. т. 92, № 2, стр. 168 – 179. ISSN 0861–3982 (Print), 1314–8540 (Online).
- ЧЕХЛАРОВА, Т., 2024. Задачи с диаграми на Вен за формиране на понятия в началното училище. *Педагогически форум*, т. 12, № 2, стр. 36 – 44, Тракийски университет – ДИПКУ, ISSN 1314-7986, DOI: 10.15547/PF.2024.010

CONCEPT FORMATION TASKS WITH FIVE SET VENN DIAGRAMS

Abstract. Here are presented 5-set Venn diagram tasks for concept formation. Rotational symmetry of a curve is used to visualize a 5-set Venn diagram. Emphasis is placed on the number of solutions and inverse problems. The role of computer models in their construction, solution and dissemination, including their use in museums, is discussed.

Keywords: Venn diagrams; rotational symmetry; GeoGebra; concepts; STEAM; visualization; gamification; augmented reality

✉ **Prof. Dr. Toni Chehlarova**

ORCID iD: 0000-0001-8472-5217

WoS ResearcherID: AAW-7402-2021

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences

Sofia, Bulgaria

E-mail: toni.chehlarova@math.bas.bg

✉ **Koya Chehlarova, PhD student**

ORCID iD: 0009-0009-8473-9921

Scopus ID: 56258777300

WoS ResearcherID: KAL-9065-2024

University of Library Studies and Information Technologies

Sofia, Bulgaria

E-mail: k.chehlarova@unibit.bg