

## ХОМОТЕТИЧНИ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ В РАВНИНАТА НА ТРИЪГЪЛНИК

<sup>1</sup>Сава Гроздев, <sup>2</sup>Веселин Ненков

<sup>1</sup>Българска академия на науките

<sup>2</sup>Технически колеж – Ловеч

**Резюме.** В настоящата статия е описан един начин за обединяване на коничните сечения в равнината на даден триъгълник в класове от хомотетични криви. Тези класове се определят от описаните за триъгълника конични сечения.

*Keywords:* triangle, homothety, conic, pole, polar

Всяко конично сечение, описано около фиксиран  $\triangle ABC$ , притежава характерни афинни и метрични параметри, по които то се различава от всички останали описани конични сечения за  $\triangle ABC$ . Оказва се освен това, че всяко такова конично сечение определя цял клас от конични сечения в равнината на  $\triangle ABC$  с хомотетични свойства. В следващите редове ще опишем аналитично тези класове, като за целта ще използваме барицентрични координати спрямо  $\triangle ABC$  с  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$  и  $C(0,0,1)$ .

Нека  $\bar{k}(O)$  е описано около  $\triangle ABC$  конично сечение с център  $O(x_0, y_0, z_0)$ . Ако  $\bar{k}(O)$  е елипса или хипербола, то  $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ , а ако е парабола, имаме  $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ . Точките от кривата  $\bar{k}(O)$  се описват с уравнението:

$$(1) \bar{k}(O): (-x_0 + y_0 + z_0)x_0yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0zx + (x_0 + y_0 - z_0)z_0xy = 0.$$

Разглеждаме крива от втора степен  $\bar{c}$  в равнината на  $\triangle ABC$ , която е определена със следното уравнение:

$$(2) \bar{c}: a_{23}yz + a_{31}zx + a_{12}xy + (a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z)(x + y + z) = 0,$$

където  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) са реални числа. По-нататък, в няколко етапа ще опишем при какви условия кривата  $\bar{c}$  е хомотетична на  $\bar{k}(O)$  и ще се спрем на някои свойства на  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$ , свързани с тяхната хомотетичност.

**1. Уравнение на крива, хомотетична на  $\bar{k}(O)$ .** Ако  $\bar{c}$  е хомотетична на  $\bar{k}(O)$ , двете криви имат едни и същи безкрайни точки. Те са общите решения на уравненията (1), (2) и уравнението на безкрайната права  $x + y + z = 0$ . Следователно безкрайните точки, принадлежащи на кривата  $\bar{c}$ , са решения на уравнението  $a_{31}x^2 + (a_{23} + a_{31} - a_{12})xy + a_{23}y^2 = 0$ , а тези на  $\bar{k}(O)$  са решения на уравнението

$$(x_0 - y_0 + z_0)y_0x^2 + (-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)xy + (-x_0 + y_0 + z_0)x_0y^2 = 0.$$

Последните уравнения имат едни и същи решения тогава и само тогава, когато са изпълнени равенствата  $a_{23} = k \cdot (-x_0 + y_0 + z_0)x_0$ ,  $a_{31} = k \cdot (x_0 - y_0 + z_0)y_0$  и  $a_{12} = k \cdot (x_0 + y_0 - z_0)z_0$ , където  $k$  е различно от нула реално число. Така показахме, че когато  $\bar{c}$  и  $\bar{k}(O)$  са хомотетични, кривата  $\bar{c}$  може да се представи с уравнение от вида:

$$(3) \quad \bar{c}: \begin{aligned} & k \cdot [(-x_0 + y_0 + z_0)x_0yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0zx + (x_0 + y_0 - z_0)z_0xy] + \\ & + (a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z)(x + y + z) = 0. \end{aligned}$$

Обратно, ако кривата  $\bar{c}$  се представя с уравнение (3), тя има същите безкрайни точки като  $\bar{k}(O)$ . Следователно видът на  $\bar{c}$  съвпада с вида на  $\bar{k}(O)$ . Оттук обаче не следва, че двете криви са хомотетични. Последното може да се забележи по следния начин. Нека  $\bar{c}$  е хипербола, която лежи в ъгъл  $\alpha$ , определен от асимптотите на  $\bar{c}$ . Ако  $\bar{c}$  е хомотетична на  $\bar{k}(O)$ , а  $\tilde{c}$  е хипербола, която има същите асимптоти като  $\bar{c}$ , но лежи в ъгъла, допълнителен на  $\alpha$ , то за  $\tilde{c}$  са в сила проведените по-горе разсъждения за криви с общи безкрайни точки. Следователно хиперболатата  $\tilde{c}$  също може да се представи с уравнение от вида (3), но тя не е хомотетична на  $\bar{k}(O)$ . По-нататък кривите от този вид ще включим в специален клас хомотетични криви, определени от  $\bar{k}(O)$ .

**2. Център на крива  $\bar{c}$ , определена с уравнение (3).** Ако  $\bar{k}(O)$  е парабола, както беше отбелязано, кривата  $\bar{c}$  с уравнение (3) има същата безкрайна точка като  $\bar{k}(O)$ . Тъй като в този случай безкрайната точка е център, то параболата  $\bar{c}$  има за център безкрайната точка  $O(x_0, y_0, z_0)$  ( $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ ). По-нататък ще определим координатите на центъра на кривата  $\bar{c}$ , когато тя е елипса или хипербола. За целта от барицентрични координати спрямо  $\triangle ABC$  ще преминем към афинни координати спрямо координатна система с център  $O$  и координатни вектори  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$ .

Нека  $\Omega$  е произволна точка в пространството, а  $\vec{e}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  и  $\vec{e}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  ( $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 0; i = 1, 2$ ) са неколинеарни вектори. За произволна точка  $P(x, y, z)$  ( $x + y + z = 1$ ) от равнината на  $\triangle ABC$  са изпълнени равенствата  $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$  и  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{O\Omega} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$ , където  $(X, Y)$  са координатите на  $P$  спрямо афинната координатна система  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ . От последното равенство получаваме  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\Omega} + X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$ . Сега, като използваме, че  $\overrightarrow{O\Omega} = x_0\overrightarrow{OA} + y_0\overrightarrow{OB} + z_0\overrightarrow{OC}$ ,  $\vec{e}_1 = \alpha_1\overrightarrow{OA} + \beta_1\overrightarrow{OB} + \gamma_1\overrightarrow{OC}$  и  $\vec{e}_2 = \alpha_2\overrightarrow{OA} + \beta_2\overrightarrow{OB} + \gamma_2\overrightarrow{OC}$ , намираме формулите, свързващи барицентричните координати  $(x, y, z)$  с афинните  $(X, Y)$  във вида

$$(4) \quad x = x_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 Y, \quad y = y_0 + \beta_1 X + \beta_2 Y, \quad z = z_0 + \gamma_1 X + \gamma_2 Y.$$

От (4) при  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CA}(1, 0, -1)$  и  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{CB}(1, -1, 0)$  получаваме равенствата

$$(5) \quad x = x_0 + X + Y, \quad y = y_0 - Y, \quad z = z_0 - X.$$

Нека  $\bar{\kappa}$  е произволна крива от втора степен в равнината на  $\triangle ABC$ , представена с уравнението

$$(6) \quad \bar{\kappa}: \bar{a}_{11}x^2 + \bar{a}_{22}y^2 + \bar{a}_{33}z^2 + 2\bar{a}_{23}yz + 2\bar{a}_{13}zx + 2\bar{a}_{12}xy = 0.$$

След заместване на (5) в (6) определяме афинното уравнение на произволна крива  $\bar{\kappa}$  във вида

$$(7) \quad \bar{\kappa}: (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{33} - 2\bar{a}_{13})X^2 + 2(\bar{a}_{11} - \bar{a}_{12} + \bar{a}_{23} - \bar{a}_{13})XY + (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} - 2\bar{a}_{12})Y^2 + \\ + 2[(\bar{a}_{11} - \bar{a}_{13})x_0 + (\bar{a}_{12} - \bar{a}_{23})y_0 + (\bar{a}_{13} - \bar{a}_{33})z_0]X + \\ + 2[(\bar{a}_{11} - \bar{a}_{12})x_0 + (\bar{a}_{12} - \bar{a}_{22})y_0 + (\bar{a}_{13} - \bar{a}_{23})z_0]Y + \\ + \bar{a}_{11}x_0^2 + \bar{a}_{22}y_0^2 + \bar{a}_{33}z_0^2 + 2\bar{a}_{23}y_0z_0 + 2\bar{a}_{13}z_0x_0 + 2\bar{a}_{12}x_0y_0 = 0.$$

След прилагане на (7) за кривите  $\bar{\kappa}(O)$  и  $\bar{c}$ , представени с уравненията (1) и (3), получаваме съответните им афинни уравнения

$$(8) \quad \bar{\kappa}(O): (1 - 2y_0)y_0X^2 + (1 - 2y_0)(1 - 2z_0)XY + (1 - 2z_0)z_0Y^2 - x_0y_0z_0 = 0,$$

$$(9) \quad \bar{c}: k(1 - 2y_0)y_0X^2 + k(1 - 2y_0)(1 - 2z_0)XY + k(1 - 2z_0)z_0Y^2 + \\ + (a_{33} - a_{11})X + (a_{22} - a_{11})Y - (kx_0y_0z_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) = 0.$$

Сега, според аналитичната геометрия (Мартинов, 1989) центърът на крива с уравнение (9) се определя от системата уравнения

$$\begin{cases} 2k(1 - 2y_0)y_0X + k(1 - 2y_0)(1 - 2z_0)Y + a_{33} - a_{11} = 0, \\ k(1 - 2y_0)(1 - 2z_0)X + 2k(1 - 2z_0)z_0Y + a_{22} - a_{11} = 0. \end{cases}$$

Тази система има следните решения:

$$X_0 = -\frac{a_{11}(1 - 2x_0) + a_{22}(1 - 2y_0) - 2a_{33}z_0}{k(1 - 2x_0)(1 - 2y_0)}, \quad Y_0 = -\frac{a_{11}(1 - 2x_0) - 2a_{22}y_0 + a_{33}(1 - 2z_0)}{k(1 - 2z_0)(1 - 2x_0)}.$$

Ако  $O_1(x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1})$  е центърът на кривата  $\bar{c}$ , след заместване на последните равенства в (5) намираме координатите на  $O_1$  чрез формулите

$$(10) \quad \begin{aligned} x_{O_1} &= x_0 - \frac{-2a_{11}x_0 + a_{22}(1-2y_0) + a_{33}(1-2z_0)}{k(1-2y_0)(1-2z_0)}, \\ y_{O_1} &= y_0 - \frac{a_{11}(1-2x_0) - 2a_{22}y_0 + a_{33}(1-2z_0)}{k(1-2z_0)(1-2x_0)}, \\ z_{O_1} &= z_0 - \frac{a_{11}(1-2x_0) + a_{22}(1-2y_0) - 2a_{33}z_0}{k(1-2x_0)(1-2y_0)}. \end{aligned}$$

**3. Радикална ос на кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$ .** От уравненията (1) и (3) се вижда, че ако кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  имат общи крайни точки, тези точки лежат върху права  $r$  с уравнение

$$(11) \quad r: a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z = 0.$$

Следователно, изпълнено е следното

**Твърдение 1.** *Кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  имат най-много две общи крайни точки.*

Правата  $r$  съществува независимо от това, дали  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  имат, или нямат общи точки. Оказва се, че правата  $r$  притежава редица свойства, които има радикалната ос на две окръжности. Затова правата  $r$  ще наричаме *радикална ос на кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$ .*

Преминаваме към описване на някои свойства на радикалната ос  $r$ . Нека кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  се пресичат в точки  $M_1(x_{M_1}, y_{M_1}, z_{M_1})$  и  $M_2(x_{M_2}, y_{M_2}, z_{M_2})$ , а  $M\left(x_M = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2}, y_M = \frac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2}, z_M = \frac{z_{M_1} + z_{M_2}}{2}\right)$  е средата на отсечката  $M_1M_2$ . След елиминирание на неизвестите  $y$  и  $z$  от системата уравнения, образувана от (1), (11) и  $x + y + z = 1$ , получаваме квадратното уравнение

$$\tau x^2 - \{a_{22}a_{33}[(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) - (-x_0 + y_0 + z_0)x_0] + a_{11}(a_{22} + a_{33})(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - a_{22}^2(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - a_{33}^2(x_0 + y_0 - z_0)z_0\}x - a_{22}a_{33}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 = 0,$$

където

$$(12) \quad \begin{aligned} \tau &= a_{22}a_{33}(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) + a_{33}a_{11}(x_0 + y_0 - z_0)(-x_0 + y_0 + z_0) + \\ &+ a_{11}a_{22}(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0) - a_{11}^2(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - \\ &- a_{22}^2(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - a_{33}^2(x_0 + y_0 - z_0)z_0. \end{aligned}$$

От формулата на Виет за сумата от корените на това уравнение следва равенството

$$(13) \quad \begin{aligned} x_M &= \frac{a_{22}a_{33}[(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) - (-x_0 + y_0 + z_0)x_0]}{2\tau} + \\ &+ \frac{a_{11}(a_{22} + a_{33})(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - a_{22}^2(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - a_{33}^2(x_0 + y_0 - z_0)z_0}{2\tau}. \end{aligned}$$

Аналогично за другите две координати на  $M$  получаваме формулите

$$(14) \quad \begin{aligned} y_M &= \frac{a_{33}a_{11}[(x_0 + y_0 - z_0)(-x_0 + y_0 + z_0) - (x_0 - y_0 + z_0)y_0]}{2\tau} + \\ &+ \frac{a_{22}(a_{33} + a_{11})(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - a_{33}^2(x_0 + y_0 - z_0)z_0 - a_{11}^2(-x_0 + y_0 + z_0)x_0}{2\tau}, \\ z_M &= \frac{a_{11}a_{22}[(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0) - (x_0 + y_0 - z_0)z_0]}{2\tau} + \\ &+ \frac{a_{33}(a_{11} + a_{22})(x_0 + y_0 - z_0)z_0 - a_{11}^2(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - a_{22}^2(x_0 - y_0 + z_0)y_0}{2\tau}. \end{aligned}$$

Трябва да се отбележи, че точката  $M$  от радикалната ос  $r$  съществува независимо от съществуването на точките  $M_1$  и  $M_2$ . Освен това, след несложни пресмятания

$$\text{от (10), (12), (13) и (14) се вижда, че е изпълнено равенството} \quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_{O_1} & y_{O_1} & z_{O_1} \\ x_M & y_M & z_M \end{vmatrix} = 0.$$

Това означава, че когато  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  са елипси или хиперболи, точките  $O$ ,  $O_1$  и  $M$  лежат на една права. От друга страна, ако кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  са параболи, то  $O_1 \equiv O$ , което по тривиални причини също означава, че  $O$ ,  $O_1$  и  $M$  лежат на една права. Така получихме следното:

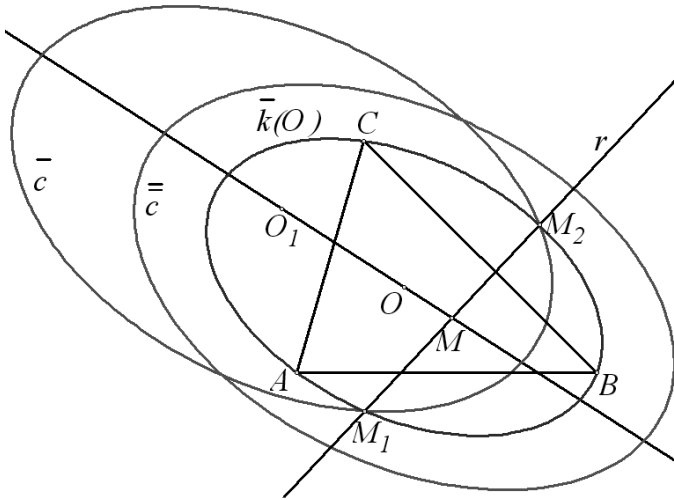
**Твърдение 2.** Централата  $OO_1$  на  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  пресича радикалната им ос  $r$  в точката  $M$  (Фиг. 1, 2, 3, 4).

От това твърдение непосредствено се получават следствията:

**Следствие 1.** Ако кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  имат две крайни общи точки  $M_1$  и  $M_2$ , средата  $M$  на отсечката  $M_1M_2$  лежи върху централата на двете криви.

**Следствие 2.** Ако кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  имат крайна допирна точка  $M$ , радикалната ос  $r$  на двете криви е тяхна обща допирателна в точката  $M$ .

От следствия 1 и 2 се вижда, че когато кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  имат поне една обща крайна точка, радикалната ос  $r$  е спрегната с  $OO_1$  както спрямо  $\bar{k}(O)$ , така и спрямо  $\bar{c}$ . Затова възниква въпросът дали  $r$  има същото свойство и в случая, когато  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  нямат общи крайни точки. В случая с параболи безкрайната точка (център)  $O(x_0, y_0, z_0)$  ( $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ ) определя общо особено направление спрямо  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$ , което е спрегнато с всяко направление в равнината на  $\triangle ABC$ , а следователно и с радикалната ос  $r$  (Мартинов, 1989). По-интересният случай, когато  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$



Фиг. 1

са елипси или хиперболи, се изследва по следния начин. От аналитичната геометрия е известно, че векторите  $\vec{u}'(\alpha', \beta')$  и  $\vec{u}''(\alpha'', \beta'')$  (координатите са афинни) са спрегнати спрямо кривата  $\bar{k}$ , представена с афинното уравнение

$$(15) \quad \bar{k}: \bar{a}_{11}X^2 + 2\bar{a}_{12}XY + \bar{a}_{22}Y^2 + 2\bar{a}_{13}X + 2\bar{a}_{23}Y + \bar{a}_{33} = 0,$$

когато скаларната функция  $\Phi_{\bar{k}}(\vec{u}', \vec{u}'') = \bar{a}_{11}\alpha'\alpha'' + \bar{a}_{12}(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta') + \bar{a}_{22}\beta'\beta''$  на векторните аргументи  $\vec{u}'$  и  $\vec{u}''$  има стойност, равна на нула (Мартинов, 1989). Сега от (5) и (10) лесно се забелязва, че векторът

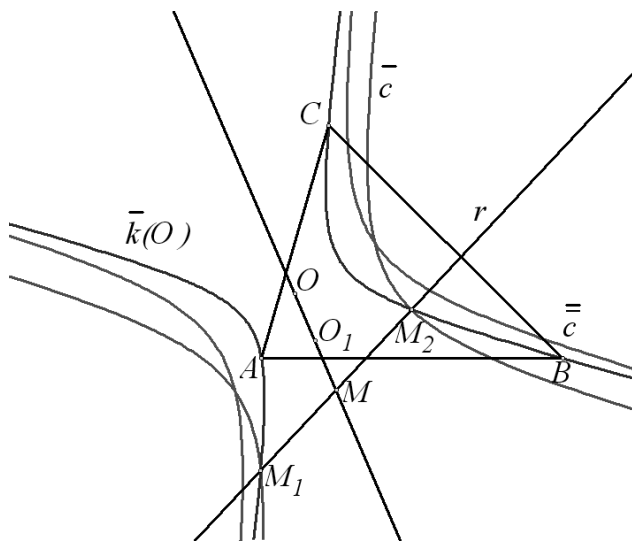
$\vec{u}'((1-2z_0)[a_{11}(1-2x_0) + a_{22}(1-2y_0) - 2a_{33}z_0], (1-2y_0)[a_{11}(1-2x_0) - 2a_{22}y_0 + a_{33}(1-2z_0)])$  е колинеарен с централата  $OO_1$ . След това отново от (5) намираме, че афинното уравнение на радикалната ос  $r$  е следното:

$$(16) \quad r: (a_{11} - a_{33})X + (a_{11} - a_{22})Y + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0 = 0.$$

Следователно векторът  $\vec{u}''(a_{22} - a_{11}, a_{11} - a_{33})$  е колинеарен с правата  $r$ . Накрая, от (8) и (9) намираме  $\Phi_{\bar{k}(O)}(\vec{u}', \vec{u}'') = \Phi_{\bar{c}}(\vec{u}', \vec{u}'') = 0$ . Така получаваме следното:

**Твърдение 3.** Централата  $OO_1$  и радикалната ос  $r$  са спрегнати прави както спрямо  $\bar{k}(O)$ , така и спрямо  $\bar{c}$ .

Следващото свойство на радикалната ос  $r$  на кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  е свързано с полярите на нейните точки. Затова ще определим уравнението на полярата на



Фиг. 2

произволна точка  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  спрямо крива  $\bar{k}$  с уравнение (6) в равнината на  $\Delta ABC$ . От аналитичната геометрия (Станилов, 1979) е известно, че полярата  $\bar{p}$  на точка  $\bar{P}(\bar{X}, \bar{Y})$  спрямо крива с уравнение (15) се определя с уравнението

$$(17) \quad \bar{p} : (\bar{a}_{11}\bar{X} + \bar{a}_{12}\bar{Y} + \bar{a}_{13})X + (\bar{a}_{12}\bar{X} + \bar{a}_{22}\bar{Y} + \bar{a}_{23})Y + \bar{a}_{13}\bar{X} + \bar{a}_{23}\bar{Y} + \bar{a}_{33} = 0.$$

От (5), (7) и (17) получаваме, че полярата  $\bar{p}$  на  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  спрямо  $\bar{k}$  в барицентрични координати има следното уравнение

$$(18) \quad (\bar{a}_{11}\bar{x} + \bar{a}_{12}\bar{y} + \bar{a}_{13}\bar{z})x + (\bar{a}_{12}\bar{x} + \bar{a}_{22}\bar{y} + \bar{a}_{23}\bar{z})y + (\bar{a}_{13}\bar{x} + \bar{a}_{23}\bar{y} + \bar{a}_{33}\bar{z})z = 0.$$

Сега от (18), (8) и (9) намираме полярите  $\bar{p}_k$  и  $\bar{p}_c$  на произволна точка  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , съответно спрямо  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  във вида:

$$(19) \quad \bar{p}_k : \left[ (x_0 + y_0 - z_0)z_0\bar{y} + (x_0 - y_0 + z_0)y_0\bar{z} \right]x + \left[ (-x_0 + y_0 + z_0)x_0\bar{z} + (x_0 + y_0 - z_0)z_0\bar{x} \right]y + \left[ (x_0 - y_0 + z_0)y_0\bar{x} + (-x_0 + y_0 + z_0)x_0\bar{y} \right]z = 0.$$

$$(20) \quad \bar{p}_c : \left\{ 2a_{11}\bar{x} + [a_{11} + a_{22} + k(x_0 + y_0 - z_0)z_0]\bar{y} + [a_{11} + a_{33} + k(x_0 - y_0 + z_0)]\bar{z} \right\}x + \left\{ [a_{22} + a_{11} + k(x_0 + y_0 - z_0)z_0]\bar{x} + 2a_{22}\bar{y} + [a_{22} + a_{33} + k(-x_0 + y_0 + z_0)x_0]\bar{z} \right\}y + \left\{ [a_{33} + a_{11} + k(x_0 - y_0 + z_0)y_0]\bar{x} + [a_{33} + a_{22} + k(-x_0 + y_0 + z_0)x_0]\bar{y} + 2a_{33}\bar{z} \right\}z = 0.$$

Ако  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in r$ , то от (11) следва, че е изпълнено равенството  $a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{33}\bar{z} = 0$ . Оттук и от (20) намираме, че полярата  $\bar{p}_c$  на  $\bar{P}$  спрямо  $\bar{c}$  има следното уравнение

$$(21) \quad \bar{p}_c : \left[ a_{11} + k(x_0 + y_0 - z_0)z_0\bar{y} + k(x_0 - y_0 + z_0)\bar{z} \right]x + \\ + \left[ a_{22} + k(-x_0 + y_0 + z_0)x_0\bar{z} + k(x_0 + y_0 - z_0)z_0\bar{x} \right]y + \\ + \left[ a_{33} + k(x_0 - y_0 + z_0)y_0\bar{x} + k(-x_0 + y_0 + z_0)x_0\bar{y} \right]z = 0.$$

Като умножим (19) с  $-k$  и съберем с (21), получаваме равенството  $a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z = 0$ , което е уравнението (11) на правата  $r$ . Следователно полярите  $\bar{p}_k$  и  $\bar{p}_c$  се пресичат върху  $r$ . Така доказахме следното:

**Твърдение 4.** Полярите  $\bar{p}_k$  и  $\bar{p}_c$  на произволна точка  $\bar{P}$  от радикалната ос  $r$  на кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  се пресичат в точка от  $r$ .

По-нататък е интересно да намерим полюсите на радикалната ос  $r$  на кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  спрямо всяка от двете криви. Преди това ще намерим координатите на полюса  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  на произволна права  $l : ux + vy + wz = 0$  спрямо произволна крива  $\bar{k}$ , определена с уравнението (6). За да намерим полюса на  $l$ , ще потърсим полярите на две точки от  $l$ . Както е известно, те се пресичат в полюса  $\bar{P}$  на  $l$  (Матеев, 1979). Нека  $l$  пресича правите  $BC$  и  $CA$  съответно в точките  $P_a\left(0, \frac{w}{w-v}, \frac{v}{v-w}\right)$  и  $P_b\left(\frac{w}{w-u}, 0, \frac{u}{u-w}\right)$ . От (18) намираме полярите  $p_a$  и  $p_b$ , съответно на точките  $P_a$  и  $P_b$ , във вида

$$p_a : (a_{12}w - a_{13}v)x + (a_{22}w - a_{23}v)y + (a_{23}w - a_{33}v)z = 0, \\ p_b : (a_{11}w - a_{13}u)x + (a_{12}w - a_{23}u)y + (a_{13}w - a_{33}u)z = 0.$$

След това решаваме системата уравнения, образувана от последните две уравнения и равенството  $x + y + z = 1$ . Така получаваме координатите на полюса  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  във вида:

$$(22) \quad \bar{x} = \frac{(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})u + (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23})v + (a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23})w}{\Delta}, \\ \bar{y} = \frac{(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23})u + (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})v + (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})w}{\Delta}, \\ \bar{z} = \frac{(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})u + (a_{23}a_{11} - a_{12}a_{13})v + (a_{33}^2 - a_{11}a_{22})w}{\Delta},$$



където

$$(24) \quad \begin{aligned} \Delta = & \left[ a_{23} (a_{23} - a_{12} - a_{13}) + a_{12} a_{33} + a_{13} a_{22} - a_{22} a_{33} \right] u + \\ & + \left[ a_{13} (a_{13} - a_{12} - a_{23}) + a_{12} a_{33} + a_{23} a_{11} - a_{33} a_{11} \right] v + \\ & + \left[ a_{12} (a_{12} - a_{23} - a_{13}) + a_{23} a_{11} + a_{13} a_{22} - a_{11} a_{22} \right] w. \end{aligned}$$

Нека  $P_k(x_{P_k}, y_{P_k}, z_{P_k})$  и  $P_c(x_{P_c}, y_{P_c}, z_{P_c})$  са полюсите на  $r$  съответно спрямо  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$ . От (24), (1) и (3) за координатите на тези точки намираме формулите

$$(25) \quad \begin{aligned} x_{P_k} &= \frac{(-x_0 + y_0 + z_0)x_0[-a_{11}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + a_{22}(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + a_{33}(x_0 + y_0 - z_0)z_0]}{(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)}, \\ y_{P_k} &= \frac{(x_0 - y_0 + z_0)y_0[a_{11}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - a_{22}(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + a_{33}(x_0 + y_0 - z_0)z_0]}{(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)}, \\ z_{P_k} &= \frac{(x_0 + y_0 - z_0)z_0[a_{11}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + a_{22}(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - a_{33}(x_0 + y_0 - z_0)z_0]}{(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)}, \end{aligned}$$

$$(26) \quad \begin{aligned} x_{P_c} &= \frac{1}{\Delta_c} \left\{ k \left[ -a_{11}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + a_{22}(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + a_{33}(x_0 + y_0 - z_0)z_0 \right] \times \right. \\ & \times (-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + \left[ -(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} - 2a_{22}a_{33})(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + \right. \\ & \left. + a_{22}(a_{22} - a_{33})(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + a_{33}(a_{33} - a_{22})(x_0 + y_0 - z_0)z_0 \right] \Big\}, \\ y_{P_c} &= \frac{1}{\Delta_c} \left\{ k \left[ a_{11}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - a_{22}(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + a_{33}(x_0 + y_0 - z_0)z_0 \right] \times \right. \\ & \times (x_0 - y_0 + z_0)y_0 + \left[ a_{11}(a_{11} - a_{33})(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - \right. \\ & \left. - (a_{22}a_{11} + a_{22}a_{33} - 2a_{11}a_{33})(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + a_{33}(a_{33} - a_{11})(x_0 + y_0 - z_0)z_0 \right] \Big\}, \\ z_{P_c} &= \frac{1}{\Delta_c} \left\{ k \left[ a_{11}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + a_{22}(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - a_{33}(x_0 + y_0 - z_0)z_0 \right] \times \right. \\ & \times (x_0 + y_0 - z_0)z_0 + \left[ a_{11}(a_{11} - a_{22})(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + a_{22}(a_{22} - a_{11})(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + \right. \\ & \left. - (a_{33}a_{11} + a_{33}a_{22} - 2a_{11}a_{22})(x_0 + y_0 - z_0)z_0 \right] \Big\}, \end{aligned}$$

където

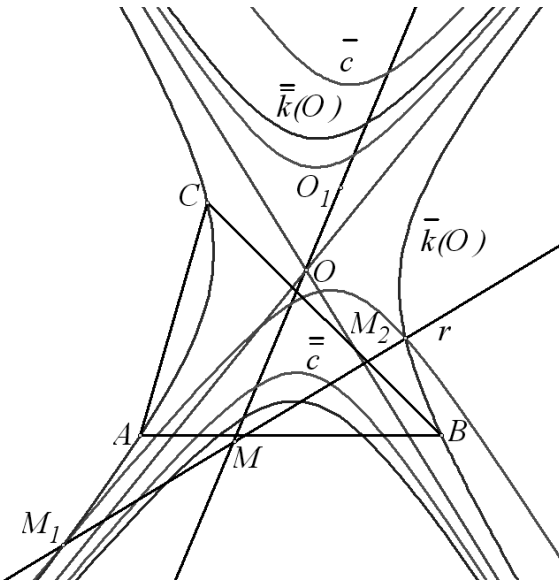
$$(27) \quad \begin{aligned} \Delta_c = & k(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) - \\ & - 2a_{22}a_{33}(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) - 2a_{33}a_{11}(x_0 + y_0 - z_0)(-x_0 + y_0 + z_0) - \\ & - 2a_{11}a_{22}(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0) + 2a_{11}^2(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + \\ & + 2a_{22}^2(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + 2a_{33}^2(x_0 + y_0 - z_0)z_0. \end{aligned}$$

Като приравним съответните координати на  $P_k$  и  $P_c$ , от (25) и (26) получаваме, че  $P_k \equiv P_c$  тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството

$$(28) \quad \begin{aligned} & 2a_{22}a_{33}(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)y_0z_0 + 2a_{33}a_{11}(x_0 + y_0 - z_0)(-x_0 + y_0 + z_0)z_0x_0 + \\ & + 2a_{11}a_{22}(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)x_0y_0 = \\ & = a_{11}^2(-x_0 + y_0 + z_0)^2x_0^2 + a_{22}^2(x_0 - y_0 + z_0)^2y_0^2 + a_{33}^2(x_0 + y_0 - z_0)^2z_0^2. \end{aligned}$$

От друга страна, равенството (28) е необходимо и достатъчно условие точките  $P_k$  и  $P_c$  да лежат на правата  $r$ . Следователно радикалната ос  $r$  има един и същ полюс спрямо  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  само когато двете криви са допирателни. Оттук получаваме още:

**Следствие 3.** *Кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  се допират тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството (28).*



Фиг. 3

**4. Хомотетичност на централните криви с уравнение (3).** Нека кривата  $\bar{c}$  има уравнение (3) и център  $O_1(x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1})$ . Разглеждаме трансляция с вектор  $\overrightarrow{OO_1}$ . Ако  $P_1(x_p, y_p, z_p)$  е точка от кривата  $\bar{c}$  и  $P(x_p, y_p, z_p)$  е съответната ѝ точка от образа  $\bar{\bar{c}}(O)$  на  $\bar{c}$  при разглежданата трансляция, то е изпълнено равенството  $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{O_1O}$ . Последното води до формулите:  $x_p = x_p + x_{O_1} - x_0$ ,  $y_p = y_p + y_{O_1} - y_0$ ,  $z_p = z_p + z_{O_1} - z_0$ . След заместване на тези равенства в (3) получаваме, че произволна точка  $P(x_p \equiv x, y_p \equiv y, z_p \equiv z)$  ( $x + y + z = 1$ ) от  $\bar{\bar{c}}(O)$  удовлетворява уравнението

$$(29) \quad \bar{c}(O): \begin{aligned} & k \cdot [(-x_0 + y_0 + z_0)x_0(y + y_{O_1} - y_0)(z + z_{O_1} - z_0) + \\ & + (x_0 - y_0 + z_0)y_0(z + z_{O_1} - z_0)(x + x_{O_1} - x_0) + \\ & + (x_0 + y_0 - z_0)z_0(x + x_{O_1} - x_0)(y + y_{O_1} - y_0)] + \\ & + a_{11}(x + x_{O_1} - x_0) + a_{22}(y + y_{O_1} - y_0) + a_{33}(z + z_{O_1} - z_0) = 0. \end{aligned}$$

Нека сега  $l$  е права през  $O$  с направляващ вектор  $\vec{l}(\alpha, \beta, \gamma) (\alpha + \beta + \gamma = 0)$ . Правата  $l$  има следните параметрични уравнения:

$$(30) \quad x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t, \quad z = z_0 + \gamma t.$$

След заместване на (30) в (29) намираме, че общите точки (ако съществуват) на  $l$  и  $\bar{c}(O)$  се получават при стойности на параметъра  $t = t_c$ , за които е изпълнено равенството

$$(31) \quad \begin{aligned} & k \cdot [(-x_0 + y_0 + z_0)x_0\beta\gamma + (x_0 - y_0 + z_0)y_0\gamma\alpha + (x_0 + y_0 - z_0)z_0\alpha\beta]t_c^2 + \\ & + k \cdot [(-x_0 + y_0 + z_0)x_0y_{O_1}z_{O_1} + (x_0 - y_0 + z_0)y_0z_{O_1}x_{O_1} + (x_0 + y_0 - z_0)z_0x_{O_1}y_{O_1}] + \\ & + a_{11}x_{O_1} + a_{22}y_{O_1} + a_{33}z_{O_1} = 0. \end{aligned}$$

По-нататък заместваме равенствата (10) в (31) и след несложни преобразувания получаваме

$$(32) \quad \begin{aligned} & k^2(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) \times \\ & \times [(-x_0 + y_0 + z_0)x_0\beta\gamma + (x_0 - y_0 + z_0)y_0\gamma\alpha + (x_0 + y_0 - z_0)z_0\alpha\beta]t_c^2 + \\ & + k^2x_0y_0z_0(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) + \\ & + kx_0y_0z_0(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) - \tau = 0, \end{aligned}$$

където  $\tau$  се изразява с равенството (12).

По отношение на общите точки (когато съществуват) на  $l$  и  $\bar{k}(O)$  от (1) и (30) намираме, че стойностите на  $t = t_k$ , при които се получават тези точки, удовлетворяват равенството

$$(33) \quad [(-x_0 + y_0 + z_0)x_0\beta\gamma + (x_0 - y_0 + z_0)y_0\gamma\alpha + (x_0 + y_0 - z_0)z_0\alpha\beta]t_k^2 + x_0y_0z_0 = 0.$$

От (32) и (33) се вижда, че отношението

$$(34) \quad \begin{aligned} h = \frac{t_c^2}{t_k^2} = & \frac{1}{k^2x_0y_0z_0(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)} \times \\ & \times [k^2x_0y_0z_0(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) + \\ & + k(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) - \tau] \end{aligned}$$

не зависи от направлението на вектора  $\vec{l}$ . Нека правата  $l$  пресича  $\bar{k}(O)$  в точките  $M'$  и  $M''$ , а  $\bar{c}(O)$  – в точките  $N'$  и  $N''$ . От (30) лесно следва, че са изпълнени равенствата:

$$\frac{|ON'|^2}{|OM'|^2} = \frac{|ON''|^2}{|OM''|^2} = \frac{|ON'|^2}{|OM'|^2} = \frac{|ON''|^2}{|OM''|^2} = h.$$

Тези равенства означават, че кривата  $\bar{c}(O)$  се получава от  $\bar{k}(O)$  при хомотетии с център  $O$  и коефициенти  $\sqrt{h}$  и  $-\sqrt{h}$ . Така получаваме следните твърдения:

**Твърдение 5.** Ако кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  са елипси, те са хомотетични (Фиг. 1).

**Твърдение 6.** Ако кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}(O)$  са хиперболи, лежащи в един и същ ъгъл, определен от общите им асимптоти, то хиперболите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  са хомотетични (Фиг. 2).

Нека  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}(O)$  са хиперболи, които са разположени в различните ъгли, образувани от общите им асимптоти. Тогава никоя от правите  $l$  не пресича едновременно  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}(O)$ , поради което числото  $h$  е отрицателно. Хиперболата  $\bar{k}(O)$ , която има следното уравнение:

$$\bar{k}(O): (1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)z_0xy - 2x_0y_0z_0(x+y+z) = 0,$$

е спрегната с  $\bar{k}(O)$  (Моденов, 1969). За  $\bar{k}(O)$  равенството (33) се заменя със следното

$$(33') \left[ (-x_0 + y_0 + z_0)x_0\beta\gamma + (x_0 - y_0 + z_0)y_0\gamma\alpha + (x_0 + y_0 - z_0)z_0\alpha\beta \right] t_k^2 - x_0y_0z_0 = 0.$$

От (32) и (33') получаваме, че числото  $(-h)$  съвпада с дясната част на равенството (34). Следователно хомотетиите с център  $O$  и коефициенти  $\sqrt{|h|}$  и  $-\sqrt{|h|}$  ( $h$  се пресмята по формулата (34)) преобразуват  $\bar{k}(O)$  в хиперболата  $\bar{c}(O)$ . Следователно хиперболата  $\bar{c}$  е хомотетична с хиперболата  $\bar{k}(O)$ , спрегната с  $\bar{k}(O)$ . Така получаваме следното:

**Твърдение 7.** Ако кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}(O)$  са хиперболи, лежащи в различните ъгли, определени от общите им асимптоти, то  $\bar{c}$  е хомотетична с хиперболата  $\bar{k}(O)$ , която е спрегната с  $\bar{k}(O)$  (Фиг. 3).

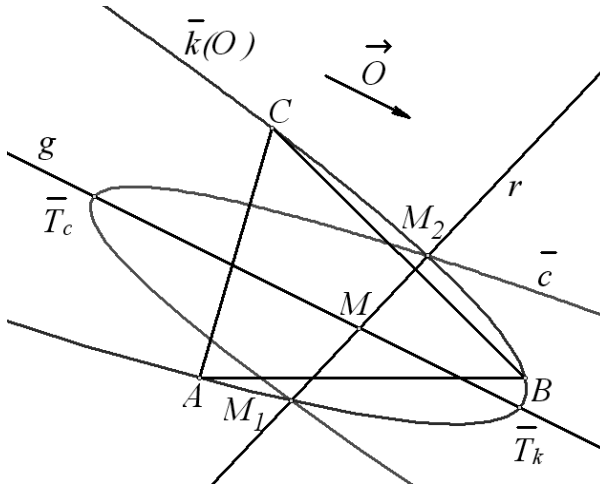
Към хомотетичността, описана в твърдения 5 и 6, трябва да се добави и уточнението, че кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  са хомотетични и в случаите, когато са еднакви. Кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  са еднакви по смисъла на твърдения 5 и 6, когато  $\bar{c}(O) \equiv k(O)$ , т.е. когато  $h = 1$ . Следователно  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  са еднакви, в случай че е изпълнено равенството

$$(35) kx_0y_0z_0(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) = \tau.$$

Кривите  $\bar{\bar{k}}(O)$  и  $\bar{c}$  са еднакви по смисъла на твърдение 7, когато  $h = -1$ . Следователно хиперболите  $\bar{\bar{k}}(O)$  и  $\bar{c}$  са еднакви, в случай че

$$(36) \quad 2k^2x_0y_0z_0(-x_0+y_0+z_0)(x_0-y_0+z_0)(x_0+y_0-z_0) + \\ + kx_0y_0z_0(-x_0+y_0+z_0)(x_0-y_0+z_0)(x_0+y_0-z_0)(a_{11}x_0+a_{22}y_0+a_{33}z_0) = \tau.$$

От твърдения 5, 6 и 7 следва, че при произволни реални стойности на константите  $k$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  и  $a_{33}$  уравнението (3) задава централна крива, която е хомотетична на  $\bar{k}(O)$  или на нейната спрегната  $\bar{\bar{k}}(O)$  (в случай на хиперболи). Следователно, когато  $\bar{k}(O)$  е елипса, всички криви в равнината на  $\Delta ABC$ , които имат уравнение (3), образуват клас от елипси, хомотетични на  $\bar{k}(O)$ . Когато  $\bar{k}(O)$  е хипербола, всички криви в равнината на  $\Delta ABC$ , които имат уравнение (3), образуват два класа от хиперболи. Единият се състои от хиперболи, хомотетични с  $\bar{k}(O)$ , а другият – от хиперболи, хомотетични със спрегнатата на  $\bar{k}(O)$  хипербола  $\bar{\bar{k}}(O)$ .



Фиг. 4

**5. Хомотетичност на параболите с уравнение (3).** Ако  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  са параболи, то  $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ . Затова уравненията им (1) и (3) се записват съответно във вида:

$$(1') \quad \bar{k}(O): x_0^2yz + y_0^2zx + z_0^2xy = 0,$$

$$(3') \quad \bar{c}: k(x_0^2yz + y_0^2zx + z_0^2xy) - (a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z)(x + y + z) = 0.$$

Изразът  $\tau$  от (12) се представя във вида

$$(12') \quad \tau = 2(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)^2,$$

а координатите (13) и (14) на точката  $M$  (която е среда на отсечката, определена от общите точки на параболите, когато те се пресичат) от радикалната ос  $r$  на  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  се представят с равенствата:

$$(37) \quad \begin{aligned} x_M &= \frac{(a_{22}y_0 + a_{33}z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) + x_0(a_{22}a_{33}x_0 + a_{33}a_{11}y_0 + a_{11}a_{22}z_0)}{2(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)^2}, \\ y_M &= \frac{(a_{33}z_0 + a_{11}x_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) + y_0(a_{22}a_{33}x_0 + a_{33}a_{11}y_0 + a_{11}a_{22}z_0)}{2(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)^2}, \\ z_M &= \frac{(a_{11}x_0 + a_{22}y_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) + z_0(a_{22}a_{33}x_0 + a_{33}a_{11}y_0 + a_{11}a_{22}z_0)}{2(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)^2}. \end{aligned}$$

Най-естественият начин да се докаже, че параболите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  са хомотетични, е този, при който могат да се определят центърът и коефициентът на хомотетията, която привежда едната крива в другата. Ако съществува хомотетия между параболите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$ , правата  $g$ , минаваща през точката  $M$  успоредно на вектора  $(x_0, y_0, z_0)$ , пресича  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  съответно в точки  $\bar{T}_k$  и  $\bar{T}_c$ , които са съответни при тази хомотетия. Затова ще търсим центъра на хомотетия за параболите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  върху правата  $g$ . Тази права има следните параметрични уравнения:

$$(38) \quad g: x = x_M + x_0t, \quad y = y_M + y_0t, \quad z = z_M + z_0t,$$

където за  $x_M$ ,  $y_M$  и  $z_M$  са изпълнени равенствата (37).

За коефициента на хомотетията, изобразяваща параболата  $\bar{k}(O)$  в  $\bar{c}$ , можем да предполагаме, че се получава от коефициента на хомотетията, изобразяваща централната крива  $\bar{k}(O)$  в  $\bar{c}$  при условието  $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ . Така от (34) получаваме, че предполагаемият коефициент на хомотетия се изразява по следния начин

$$(39) \quad h_p = \frac{2kx_0y_0z_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0}{2kx_0y_0z_0}.$$

След заместване на (38) в (1') и (3') (като се вземат предвид равенствата (37)), се вижда, че съответните стойности  $\bar{t}_k$  и  $\bar{t}_c$  на  $t$ , при които се получават координатите съответно на  $\bar{T}_k$  и  $\bar{T}_c$ , се пресмятат по формулите:

$$(40) \quad \begin{aligned} \bar{t}_k &= \frac{\vartheta}{4x_0y_0z_0(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)^2}, \\ \bar{t}_c &= \frac{2k\vartheta}{4(2x_0y_0z_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)^2}, \end{aligned}$$

където

$$(41) \quad \vartheta = a_{11}^2x_0^4 + a_{22}^2y_0^4 + a_{33}^2z_0^4 - 2a_{22}a_{33}y_0^2z_0^2 - 2a_{33}a_{11}z_0^2x_0^2 - 2a_{11}a_{22}x_0^2y_0^2.$$

(Любопитно е да се отбележи, че равенствата (39) и (40) водят до зависимостта  $\frac{\bar{t}_k}{\bar{t}_c} = h_p$ .)

Сега да разгледаме хомотетия с център  $H$  и коефициент  $h_p$  (за който е изпълнено равенството (39)), която изобразява  $\bar{T}_k$  в  $\bar{T}_c$ . Следователно е изпълнено векторното равенство  $\overrightarrow{HT}_c = h_p \overrightarrow{HT}_k$ , което води до координатното представяне на  $H$  във вида:

$$(42) \quad H \left( x_M + \frac{m}{1-h_p}x_0, y_M + \frac{m}{1-h_p}y_0, z_M + \frac{m}{1-h_p}z_0 \right),$$

където

$$(43) \quad m = \bar{t}_c - h_p \bar{t}_k = - \frac{\vartheta(4kx_0y_0z_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)}{8kx_0^2y_0^2z_0^2(2kx_0y_0z_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)}.$$

Нека сега  $N(x_N, y_N, z_N)$  ( $x_N + y_N + z_N = 1$ ) е произволна точка от параболата  $\bar{k}(O)$ , а  $N'(x_{N'}, y_{N'}, z_{N'})$  е нейният образ при разглежданата хомотетия. От векторното равенство  $\overrightarrow{HN'} = h_p \overrightarrow{HN}$  и (42) намираме, че координатите на  $N'$  зависят от координатите на  $N$  по следния начин:

$$(44) \quad x_{N'} = h_p x_N + (1-h_p)x_M + m x_0, y_{N'} = h_p y_N + (1-h_p)y_M + m y_0, z_{N'} = h_p z_N + (1-h_p)z_M + m z_0.$$

След заместване на (44) в лявата страна на (3'), като се вземат предвид равенствата (37), (39), (41) и (43), се установява, че получената стойност е равна на нула. Следователно  $N'$  е точка от параболата  $\bar{c}$ . Така доказахме следното:

**Твърдение 8.** Ако кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  са параболи, те са хомотетични (Фиг. 4).

Към хомотетичността, описана в твърдение 8, трябва да се добави и уточнението, че считаме параболическите криви  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  за хомотетични и в случаите, когато са еднакви. Параболите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  са еднакви, когато  $\bar{c}$  се получава чрез трансляция от  $\bar{k}(O)$ , т.е. при  $h_p = 1$ . Според (39) последното условие е изпълнено точно когато е в сила равенството

$$(45) \quad a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0 = 0.$$

Кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{c}$  са еднакви и в случая, когато са централно симетрични, т.е. при  $h_p = -1$ . Според (39) последното условие е изпълнено точно когато е в сила равенството

$$(46) \quad 4x_0y_0z_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0 = 0.$$

От твърдение 8 следва, че при произволни реални стойности на константите  $k$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  и  $a_{33}$  уравнението (3') задава парабола, която е хомотетична на предварително зададената описана парабола  $\bar{k}(O)$ . Следователно всички параболы в равнината на  $\triangle ABC$ , които имат уравнение (3'), са хомотетични помежду си. Последното наблюдение означава още, че всички параболы в равнината, които имат успоредни оси, са хомотетични.

Накрая ще отбележим, че описаните идеи за изследване на разпределянето на коничните сечения от равнината на  $\triangle ABC$  в хомотетични класове позволяват за дадена описана крива  $\bar{k}(O)$  при всеки избор на константите  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  и  $k$  да се построи съответната хомотетична на  $\bar{k}(O)$  крива  $\bar{c}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

Мартинов, Н. (1989). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.

Матеев, А. (1979). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство.

Моденов, П. С. (1969). *Аналитическая геометрия*. Москва: Изд. Московского университета.

Станилов, Г. (1979). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.

## HOMOTHETIC CONICS IN THE PLANE OF A TRIANGLE

**Abstract.** The present paper considers a method for the classification of the conics in the plane of a triangle into classes of homothetic curves. The classes are determined by the circumscribed conics of the triangle.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**

Institute of Mathematics and Informatics – BAS

Acad. G. Bonchev Street, bl. 8

1113 Sofia, Bulgaria

E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech

31, Sajko Saev Street

Lovech, Bulgaria

E-mail: vnenkov@mail.bg