

## ВРЪЗКИ МЕЖДУ ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНИ ТОЧКИ В ЧЕТИРИЪГЪЛНИКА

<sup>1)</sup>Станислав Стефанов, Веселин Ненков

<sup>1)</sup>Технически университет – София

**Резюме.** В статията се разглеждат геометрични връзки между различни забележителни точки в четириъгълника. Намерени са три забележителни окръжности и две забележителни прави, съдържащи някои от тези точки.

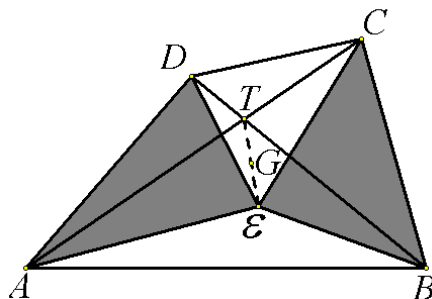
**Keywords:** quadrilateral; notable point; line; circle

В тази публикация ще разгледаме някои геометрични връзки между различни забележителни точки в изпъкнал четириъгълник. Преди да се спрем на въпросните връзки, ще дадем някои необходими сведения за самите точки.

### 1. Основни свойства на някои забележителни точки

Различни свойства на редица забележителни точки в изпъкналия четириъгълник са подробно изследвани и описани в отделни публикации, посочени накрая в литературата. Тук ще се спрем на някои тях, които ще са ни необходими в изложението по-нататък. В (Наймов, 1997) е изучена забележителната точка *епицентър*. Това е точка  $\mathcal{E}$  в четириъгълник  $ABCD$ , за която са изпълнени равенствата  $S_{AB\mathcal{E}} = S_{CD\mathcal{E}}$  и  $S_{AD\mathcal{E}} = S_{BC\mathcal{E}}$  (фиг. 1). От (Наймов, 1997) е известно следното свойство:

(1) Епицентърът  $\mathcal{E}$  е симетричен на пресечната точка  $T$  на диагоналите  $AC$  и  $BD$  относно центъра на тежестта  $G$  на четириъгълника (фиг. 1).



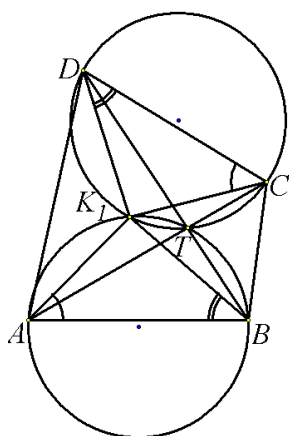
Фигура 1

В (Haimov, 2001) и (Haimov, 2005) се разглежда една двойка забележителни точки в изпъкнал четириъгълник, която е аналог на двойката точки на Брокар в триъгълника. По тази причина точките от тази двойка са наречени брокариани на четириъгълника. Брокарианите са свързани със същите двойки триъгълници, които определят епицентъра на четириъгълника  $ABCD$ . Втората обща точка  $K_1$  на описаните за  $\triangle ABT$  и  $\triangle CDT$  окръжности се нарича *брокариана на четириъгълника  $ABCD$ , съответна на страните му  $AB$  и  $CD$*  (фиг. 2). Аналогично се определя и *брокарианата  $K_2$ , съответна на страните  $AD$  и  $BC$* . Брокарианите  $K_1$  и  $K_2$  притежават следните свойства.

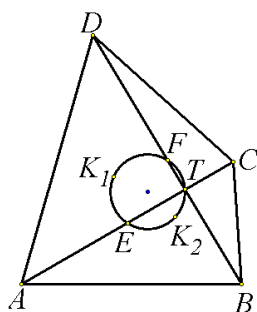
(2) Брокарианите  $K_1$  и  $K_2$  образуват със съответните им страни подобни триъгълници, т.е.  $\triangle ABK_1 \sim \triangle CDK_1$  и  $\triangle ADK_2 \sim \triangle CBK_2$ .

(3) Брокарианите  $K_1$  и  $K_2$  лежат на една окръжност със средите  $E$  и  $F$  на диагоналите  $AC$  и  $BD$  и пресечната им точка  $T$  (фиг. 3).

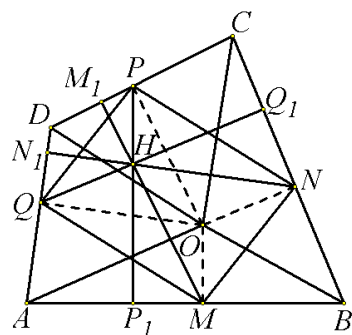
Последната окръжност се нарича *Брокарова окръжност*. Тя се характеризира с това, че върху нея лежат и други забележителни точки на четириъгълника.



Фигура 2



Фигура 3



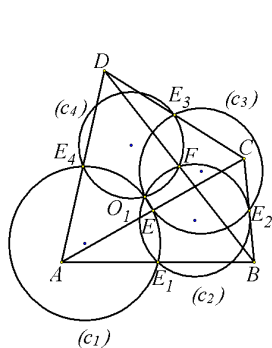
Фигура 4

В (Nenkov, Stefanov, Haimov, 2016) и (Haimov, 2010) се разглеждат две свързани помежду си забележителни точки в изпъкнал четириъгълник – обобщения съответно на центъра на описаната окръжност на вписания четириъгълник и на неговия ортоцентър. Точките са наречени съответно псевдоцентър и ортоцентър. Псевдоцентърът обикновено се дефинира по два различни начина. По-простият от тях е следният: ако  $R_{ABC}$ ,  $R_{BCD}$ ,  $R_{CDA}$  и  $R_{DAB}$  са радиусите на описаните съответно около триъгълниците  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  и  $DAB$  окръжности, то в равнината на изпъкналия четириъгълник  $ABCD$  съществу-

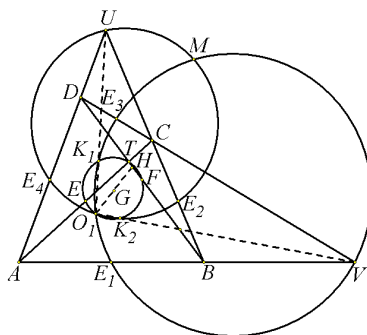
ва единствена точка  $O$ , за разстоянията от която до върховете на  $ABCD$  са изпълнени равенствата  $AO.R_{BCD} = BO.R_{CDA} = CO.R_{DAB} = DO.R_{ABC}$  (фиг. 4). Точката  $O$  се нарича *псевдоцентър* на  $ABCD$ . Тази точка ще наричаме още *първи псевдоцентър* на  $ABCD$ .

Едно основно свойство на псевдоцентъра  $O$  се състои в това, че ортогоналните му проекции върху правите, определени от страните на четириъгълника, са върхове на успоредник. Правите през върховете на този успоредник, перпендикулярни на срещуположните страни на  $ABCD$ , се пресичат в една точка  $H$ . Тази точка се нарича *ортоцентър* на четириъгълника  $ABCD$ .

Освен псевдоцентъра друго обобщение на центъра на описаната окръжност за вписания четириъгълник, разгледано в (Стефанов, 2017), е така нареченият втори псевдоцентър. Той се определя чрез следващата конструкция. Ако  $E_1, E_2, E_3, E_4, E$  и  $F$  са средите съответно на отсечките  $AB, BC, CD, DA, AC$  и  $BD$ , то с  $(c_1), (c_2), (c_3)$  и  $(c_4)$  означаваме описаните окръжности съответно на триъгълниците  $E_4E_1E, E_1E_2F, E_2E_3E$  и  $E_3E_4F$ . Оказва се, че окръжностите  $(c_1), (c_2), (c_3)$  и  $(c_4)$  имат обща точка  $O_1$ . Точката  $O_1$  се нарича *втори псевдоцентър* на  $ABCD$  (фиг. 5).



Фигура 5



Фигура 6

Нека правите  $AD$  и  $BC$  се пресичат в точка  $U$ , а правите  $AB$  и  $DC$  се пресичат в точката  $V$ . Правите  $UK_1$  и  $VK_2$  ще наричаме *антисимедиани* на  $ABCD$ , а описаните окръжности на  $\triangle E_2E_4U$  и  $\triangle E_1E_3V$  ще наричаме съответно *Брокарова окръжност, съответна на страните  $BC$  и  $DA$* , и *Брокарова окръжност, съответна на страните  $AB$  и  $CD$* . Във връзка с тези понятия са изпълнени следните свойства.

(4) Трите Брокарови окръжности минават през втория псевдоцентър  $O_1$  на  $ABCD$  (фиг. 6).

(5) Двете антисимедиани  $UK_1$  и  $VK_2$  минават през втория псевдоцентър  $O_1$  на  $ABCD$  (фиг. 6).

(6) Вторият псевдоцентър  $O_1$  е симетричен на ортоцентъра  $H$  спрямо центъра на тежестта  $G$  на четириъгълника  $ABCD$  (фиг. 6).

В изпъкналия четириъгълник  $ABCD$  се разглежда точка, която е аналог на точката на Лемоан в триъгълника (Наймов, 2011). Нека  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  и  $h_4$  са разстоянията от произволна точка  $L$  в равнината на  $ABCD$  съответно до правите  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ . Точката  $L$ , за която  $\frac{h_1}{h_3} = \frac{AB}{CD}$  и  $\frac{h_2}{h_4} = \frac{BC}{DA}$ , се нарича *точка на Лемоан* за  $ABCD$  (фиг. 7).

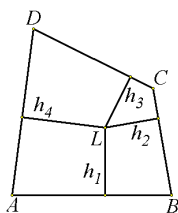
Накрая ще припомним, че описаните около триъгълниците  $ABU$ ,  $BCV$ ,  $CDU$  и  $DAV$  окръжности имат обща точка  $M$ , която се нарича *точка на Микел* за четириъгълника  $ABCD$  (фиг. 8). Следващите свойства на  $ABCD$ , свързани с точката на Микел, са доказани в (Nenokov, Stefanov, Naïmov, 2017).

(7) Точката на Микел  $M$  образува със срещуположните страни двойки подобни триъгълници, т.е.  $\triangle ADM \sim \triangle BCM$  и  $\triangle ABM \sim \triangle DCM$  (фиг. 8).

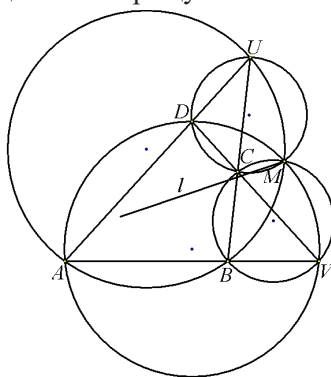
(8) Ъглите  $AMC$ ,  $BMD$  и  $UMV$  имат обща ъглополовяща  $l$ , която се нарича *ос на Микел* за  $ABCD$  (фиг. 8).

(9) Изпълнени са равенствата  $AM \cdot CM = BM \cdot DM = UM \cdot VM = r^2$ , където числото  $r^2$  се нарича *константа на Микел* (фиг. 8).

(10) Точката на Микел  $M$  лежи върху Брокаровите окръжности на четириъгълника, които са съответни на двойките срещуположни страни (фиг. 6).



Фигура 7



Фигура 8

С точката на Микел  $M$  е свързано едно преобразуване в равнината на четириъгълника  $ABCD$ , което играе първостепенна роля при доказателствата на почти всички твърдения в настоящата статия. То се дефинира като композиция от осева симетрия  $g$  спрямо оста на Микел и инверсия  $I$  с полюс точката  $M$  и степен константата на Микел  $r^2$ . Това изображение ще означаваме с  $Ig(M, r^2)$  и ще наричаме *инверсна изогоналност* спрямо четириъгълника  $ABCD$ . Изображението  $Ig(M, r^2)$  притежава свойствата:

(\*) при  $Ig$  окръжност, неминаваща през полюса  $M$ , се изобразява в окръжност, неминаваща през  $M$ ;

(\*\*) при  $Ig$  права през  $M$  се изобразява в права през  $M$ ;

(\*\*\*) при  $Ig$  бромарианите  $K_1$  и  $K_2$  се изобразяват една в друга, т.е.  $Ig(K_1) = K_2$  и  $Ig(K_2) = K_1$ ;

(\*\*\*\*) при  $Ig$  първият псевдоцентър  $O$  се изобразява в пресечната точка на диагоналите  $T$ , т.е.  $Ig(O) = T$  и  $Ig(T) = O$ ;

(\*\*\*\*\*) при  $Ig$  вторият псевдоцентър  $O_1$  се изобразява в точката на Лемоан  $L$ , т.е.  $Ig(O_1) = L$  и  $Ig(L) = O_1$ .

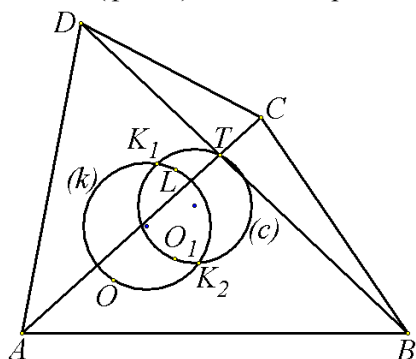
След тези уводни бележки ще пристъпим към разглеждане връзките между изброените забележителни точки в четириъгълника.

## 2. Окръжност на Лемоан и окръжност на епицентъра

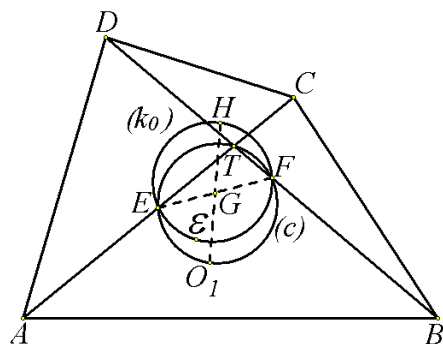
Както е известно, центърът на описаната окръжност, точката на Лемоан и точките на Бромар в триъгълника лежат на една окръжност. Сега ще установим, че техните аналози в произволен изпъкнал четириъгълник също лежат на една окръжност.

**Теорема 1.** *Първият псевдоцентър  $O$ , точката на Лемоан  $L$  и бромарианите  $K_1$  и  $K_2$  лежат на една окръжност, която е образ на Бромаровата окръжност при инверсната изогоналност  $Ig$  (фиг. 9).*

**Доказателство.** От свойства (3) и (4) следва, че точките  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $T$  и  $O_1$  лежат на Бромаровата окръжност  $(c)$  за четириъгълника  $ABCD$ . Освен това според свойствата (\*\*\*) , (\*\*\*\*) и (\*\*\*\*\*) на  $Ig$ , имаме  $Ig(K_1) = K_2$ ,  $Ig(K_2) = K_1$ ,  $Ig(T) = O$  и  $Ig(O_1) = L$ . От последните равенства и (\*) следва, че точките  $K_2$ ,  $K_1$ ,  $O$  и  $L$  лежат на една окръжност  $(k)$  (фиг. 9). С това теоремата е доказана.



Фигура 9



Фигура 10

**Определение 1.** Окръжността, върху която лежат брокарианите  $K_1$  и  $K_2$ , точката на Лемоан  $L$  и първият псевдоцентър  $O$ , ще наричаме *окръжност на Лемоан*.

Според доказаната теорема окръжността на Лемоан  $(k)$  е инверсно изогонална на Брокаровата окръжност  $(c)$ .

**Теорема 2.** Средите  $E$  и  $F$  съответно на диагоналите  $AC$  и  $BD$ , епицентърът  $\mathcal{E}$  и ортоцентърът  $H$  на изпъкналия четириъгълник  $ABCD$  лежат на една окръжност, симетрична на Брокаровата относно центъра на тежестта  $G$  (фиг. 10).

**Доказателство.** Симетрията относно центъра на тежестта  $G$  означаваме с  $g_0$  (фиг. 10). Според свойство (1) епицентърът  $\mathcal{E}$  и пресечната точка на диагоналите  $T$  са симетрични относно  $G$ . Следователно  $g_0(T) = \mathcal{E}$ . Същевременно центърът на тежестта  $G$  е среда на отсечката  $EF$ . Затова  $g_0(E) = F$  и  $g_0(F) = E$ . Накрая от свойство (4) имаме  $g_0(O_1) = H$ . Тъй като точките  $T$ ,  $E$ ,  $F$  и  $O_1$  лежат на Брокаровата окръжност  $(c)$ , то и техните образи при симетрията  $g_0$  лежат на една окръжност  $(k_0)$ , която е симетрична на Брокаровата  $(c)$  относно  $G$ .

**Определение 2.** Окръжността, върху която лежат средите  $E$  и  $F$  на диагоналите на  $ABCD$ , епицентър  $\mathcal{E}$  и ортоцентърът  $H$ , ще наричаме *окръжност на епицентъра*.

Според доказаната теорема окръжността на епицентъра  $(k_0)$  е симетрична на Брокаровата окръжност  $(c)$  относно центъра на тежестта  $G$  на четириъгълника  $ABCD$ .

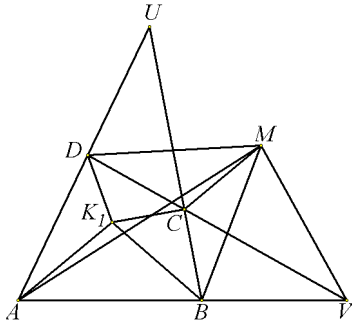
### 3. Права на Микел и права на Лемоан

Сега ще докажем колинеарността на две тройки от разглежданите забележителни за четириъгълника точки и че двете прави, върху които лежат тези точки, са съответни при инверсната изогоналност. Ще използваме следващите две лема.

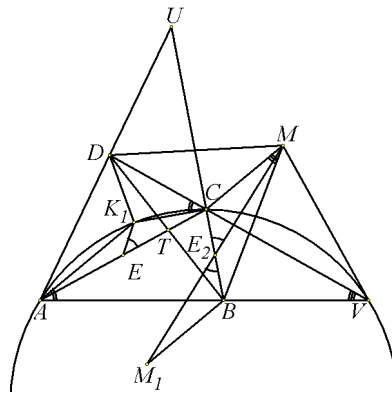
**Лема 1.** Брокарианата  $K_1$ , съответна на страните  $AB$  и  $CD$ , и точката на Микел  $M$  са свързани с равенството  $\frac{AK_1}{CK_1} = \frac{BM}{CM}$ .

**Доказателство.** От свойство (2) е известно, че  $\triangle ABK_1 \sim \triangle CDK_1$  (фиг. 11). Затова е изпълнено  $\frac{AK_1}{CK_1} = \frac{AB}{CD}$ . Аналогично от свойство (7) следва

$\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{CD}$ . Като сравним двете равенства, получаваме  $\frac{AK_1}{CK_1} = \frac{BM}{CM}$ , с което лемата е доказана.



Фигура 11



Фигура 12

**Лема 2.** Изпълнено е равенството  $\sphericalangle K_1ET = \sphericalangle ME_2U$ .

**Доказателство.** Точката, симетрична на  $M$  относно средата  $E_2$  на страната  $BC$ , означаваме с  $M_1$  (фиг. 12). Четириъгълникът  $M_1BMC$  е успоредник, поради което  $M_1B = CM$ . Оттук и равенството  $\frac{AK_1}{CK_1} = \frac{BM}{CM}$  (по лема 1) получаваме:

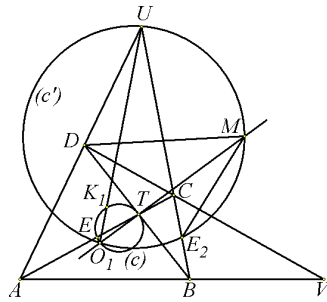
$$(i) \quad \frac{AK_1}{CK_1} = \frac{BM}{M_1B}.$$

Ще докажем, че  $\triangle AK_1C \sim \triangle MBM_1$ . От (i) следва, че за това е достатъчно да докажем равенството  $\sphericalangle AK_1C = \sphericalangle MBM_1$ . Понеже от свойство (2) следва  $\sphericalangle BAK_1 = \sphericalangle K_1CD$ , то четириъгълникът  $AVCK_1$  е вписан в окръжност. Оттук имаме  $\sphericalangle AK_1C = 180^\circ - \sphericalangle AVC$ . Същевременно точката на Микел  $M$  лежи на описаната около  $\triangle BCV$  окръжност и затова  $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BVC = \sphericalangle AVC$ . Оттук следва, че  $\sphericalangle AK_1C = 180^\circ - \sphericalangle AVC = 180^\circ - \sphericalangle BMC = \sphericalangle MBM_1$ . Така се убеждаваме, че  $\sphericalangle AK_1C = \sphericalangle MBM_1$ , което доказва подобие на триъгълниците  $AK_1C$  и  $MBM_1$ . В тези триъгълници отсечките  $K_1E$  и  $BE_2$  са съответни медиани, а  $C$  и  $M_1$  – съответни върхове. Следователно  $\sphericalangle K_1EC = \sphericalangle BE_2M_1$ , т.е.  $\sphericalangle K_1ET = \sphericalangle ME_2U$ . С това лемата е доказана.

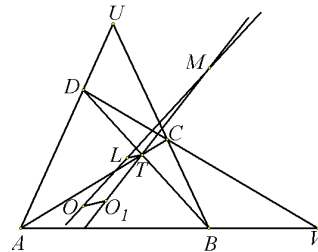
**Теорема 3.** Вторият псевдоцентър  $O_1$ , пресечната точка на диагоналите  $T$  и точката на Микел  $M$  лежат на една права (фиг. 13).

**Доказателство.** От свойства (4) и (5) е известно, че вторият псевдоцентър  $O_1$  лежи на антисимедианата  $K_1U$  и е обща точка на Брокеровата окръжност  $(c)$  и Брокеровата окръжност  $(c')$ , съответна на страните  $AD$  и  $BC$  (фиг. 13). Освен това от свойство (3) за  $(c)$  и аналогичното му за

( $c'$ ), имаме  $K_1, E, T \in (c)$  и  $U, M, E \in (c')$  (фиг. 13). Като вземем предвид и равенството  $\sphericalangle K_1ET = \sphericalangle UE_2M$  (по лема 2), получаваме последователно  $\sphericalangle TO_1K_1 = \sphericalangle TEK_1 = \sphericalangle ME_2U = \sphericalangle MO_1U$ , т.е.  $\sphericalangle TO_1U = \sphericalangle MO_1U$ , където ъглите са ориентирани еднакво. Така заключаваме, че  $O_1T^{\rightarrow}$  и  $O_1M^{\rightarrow}$  сключват равни ъгли с  $O_1U^{\rightarrow}$ , откъдето следва, че те съвпадат. С това се убеждаваме, че точките  $O_1$ ,  $T$  и  $M$  лежат на една права.



Фигура 13



Фигура 14

**Определение 3.** Правата, върху която лежат вторият псевдоцентър  $O_1$ , пресечната точка на диагоналите  $T$  и точката на Микел  $M$ , ще наричаме *права на Микел*.

**Теорема 4.** Първият псевдоцентърът  $O$ , точката на Лемоан  $L$  и точката на Микел  $M$  лежат на една права, която е образ на правата на Микел при инверсната изогоналност (фиг. 14).

**Доказателство.** Според теорема 3 и определение 3 точките  $O_1$ ,  $T$  и  $M$  лежат върху правата на Микел. Тъй като тази права минава през полюса  $M$  на инверсната изогоналност  $Ig$ , според свойство (\*\*) тя се изобразява в права през  $M$ . От друга страна, поради свойства (\*\*\*\*) и (\*\*\*\*\*) имаме  $Ig(T) = O$  и  $Ig(O_1) = L$ . Следователно точките  $L$ ,  $O$  и  $M$  лежат на една права, която е образ на правата на Микел при инверсната изогоналност  $Ig$  (фиг. 14).

**Определение 4.** Правата, върху която лежат първият псевдоцентър  $O$ , точката на Лемоан  $L$  и точката на Микел  $M$ , ще наричаме *права на Лемоан*.

От последната теорема следва, че правата на Микел и правата на Лемоан са инверсно изогонални.

#### 4. Други връзки между забележителни точки в четириъгълника

**Теорема 5.** Правата, определена от двата псевдоцентъра  $O$  и  $O_1$ , е успоредна на правата, определена от точката на Лемоан  $L$  и пресечната точка  $T$  на диагоналите (фиг. 14).

**Доказателство.** От свойства (\*\*\*\*) и (\*\*\*\*\*) на инверсната изогонал-



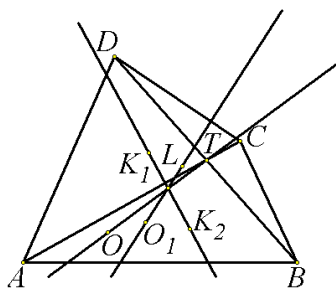
ност  $Ig$  имаме  $Ig(T) = O$  и  $Ig(O_1) = L$  (фиг. 14). Затова са изпълнени равенствата  $MT \cdot MO = r^2$  и  $MO_1 \cdot ML = r^2$ . Оттук следва  $MO_1 \cdot ML = MT \cdot MO$ .

Следователно  $\frac{MO_1}{MT} = \frac{MO}{ML}$ . Като вземем предвид, че точките  $O_1$ ,  $T$  и  $M$  лежат върху правата на Микел, а точките  $O$ ,  $L$  и  $M$  лежат върху правата на Лемоан, заключаваме, че  $TL \parallel OO_1$ .

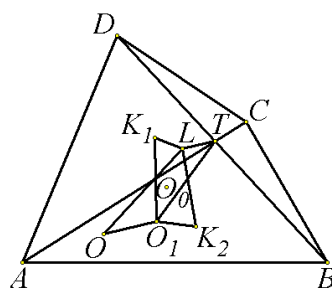
В заключение привеждаме без доказателство още две интересни твърдения, свързващи разглежданите забележителни точки.

**Теорема 6.** Правите  $OT$ ,  $O_1L$  и  $K_1K_2$  се пресичат в една точка (фиг. 15).

**Теорема 7.** Четириъгълниците  $O_1K_2LK_1$  и  $O_1OLT$  имат общ първи псевдоцентър (фиг. 16).



Фигура 15



Фигура 16

## REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Haimov, H. (1997). The epicenter – a notable point in the quadrilateral (In Bulgarian). *Mathematics*, 1, 18 – 24. [Хаимов, Х. (1997). Епицентърът – забележителна точка в четириъгълника, *Математика*, 1, 18 – 24.]
- Haimov, H. (2001). The Brocardians – notable points in the quadrilateral (In Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 6, 17 – 23. [Хаимов, Х. (2001). Брокардианите – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 17 – 23.]
- Haimov, H. (2005). Brocardians of the quadrilateral (In Bulgarian). *Mathematics*, 5, 15 – 22. [Хаимов, Х. (2005). Брокардиани на четириъгълника, *Математика*, 5, 15 – 22.]
- Haimov, H. (2010). Geometry of the quadrilateral (In Bulgarian). *Mathematics Plus*, 2, 28 – 51. [Хаимов, Х. (2010). Геометрия на четириъгълника, *Математика плюс*, 2, 28 – 51.]
- Haimov, H. (2011). Lemoine point (In Bulgarian). *Mathematics*, 6, 3 – 12. [Хаимов, Х. (2011). Точка на Лемоан, *Математика*, 6, 3 – 12.]
- Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2016). Pseudocenter and orthocenter –

notable points in the quadrilateral (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 6, 614 – 625. [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов (2016). [Псевдоцентър и ортоцентър – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 614 – 625.]

Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2017). Geometry of the quadrilateral. Miquel point. Inverse isogonality (In Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 1, 81 – 93. [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов (2017). Геометрия на четириъгълника. Точка на Микел. Инверсна изогоналност, *Математика и информатика*, 1, 81 – 93.]

Stefanov, S. (2017). Second pseudocenter of the quadrilateral (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 2, 261 – 270. [Стефанов, Ст. (2017). Втори псевдоцентър на четириъгълник, *Математика и информатика*, 3, 261 – 270.]

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1.)

Malcheski, R., S. Grozdev & K. Anevska (2015). *Geometry of complex numbers*, Sofia: Arhimedes 2000. (ISBN 978-954-779-1886.)

Georgieva, M. & S. Grozdev (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4<sup>th</sup> ed.) (In Bulgarian). Sofia: Iztok-Zapad. (ISBN 978-619-152-869-1). 327 pages [Георгиева, М. & С. Гроздев (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.) София: Изток – Запад.]

## CONNECTIONS AMONG NOTABLE POINTS IN THE QUADRILATERAL

**Abstract.** The paper considers some geometric connections among different notable points in the quadrilateral. What are obtained are three notable circles and two notable lines which contain some of these points.

✉ **Mr. Stanislav Stefanov**  
Technical University of Sofia  
Sofia, Bulgaria  
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**  
E-mail: vnenkov@mail.bg