

ТРОЙКИ ЦЕНТРАЛНИ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ ПРЕЗ ПОСТОЯННА ТОЧКА ВЪРХУ ПОСТОЯННО КОНИЧНО СЕЧЕНИЕ

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Висше училище по застраховане и финанси – София

Резюме. Статията представя обобщение на една задача за окръжности през постоянна точка в равнината на даден триъгълник.

Keywords: triangle; center; centroid; circum curve; Euler line

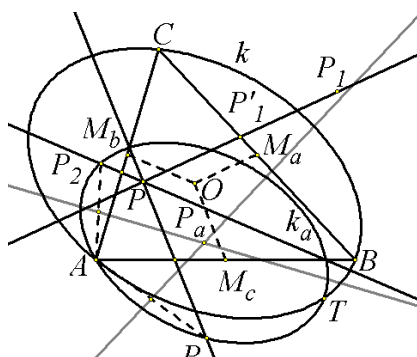
1. Търсене на обобщение

Целта на настоящите изследвания се състои в откриване на обобщение на следната задача: Точките O и G са съответно центърът на описаната окръжност и медицентърът на $\triangle ABC$. Точките O_1 , O_2 и O_3 са симетрични на O съответно спрямо правите BC , CA и AB . Аналогично G_1 , G_2 и G_3 са симетрични на G съответно спрямо BC , CA и AB . Да се докаже, че описаните окръжности на триъгълниците AO_2O_3 , BO_3O_1 , CO_1O_2 , AG_2G_3 , BG_3G_1 и CG_1G_2 минават през една точка T от описаната около $\triangle ABC$ окръжност Γ .

При извършване на необходимите изследвания в процеса на търсене на желаното обобщение на тази задача е подходящо да се използват динамичните възможности на програмата THE GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP). В началото да отбележим, че според известно свойство на ортоцентъра H на $\triangle ABC$ точките H_1 , H_2 и H_3 , които са симетрични на H съответно спрямо BC , CA и AB , лежат върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност Γ . Следователно описаните окръжности на триъгълниците AH_2H_3 , BH_3H_1 и CH_1H_2 , които съвпадат с Γ , също минават през T . Това ни дава основание да предположим, че ако P е произволна точка от Ойлеровата права на $\triangle ABC$, а точките P_1 , P_2 и P_3 са симетричните на P съответно спрямо BC , CA и AB , описаните окръжности на триъгълниците AP_2P_3 , BP_3P_1 и CP_1P_2 минават през същата точка T , която участва във формулировката на задачата. Експериментите с GSP показват, че това предположение е основателно. Така получаваме едно обобщение на задачата.

По-нататък ще търсим обобщение на задачата, като заменим окръжностите с подходящи конични сечения. За целта заменяме описаната окръжността Γ с произволно описано за $\triangle ABC$ конично сечение k с център O . Освен това нека P е произволна точка в равнината на $\triangle ABC$. С P_1 , P_2 и P_3 означаваме точките,

симетрични на P съответно спрямо BC , CA и AB . През средите на отсечките AP_2 , AP_3 и P_2P_3 построяваме прави, които са съответно спрегнати с правите AP_2 , AP_3 и P_2P_3 спрямо k . Тези прави се пресичат в една точка и затова общата им точка може да се разглежда като център на описано за ΔAP_2P_3 конично сечение. Аналогично построяваме конични сечения, които са описани около триъгълниците BP_3P_1 и CP_1P_2 . Наблюденията с GSP обаче показват, че така построените конични сечения нямат обща точка дори в случаите, когато $P \equiv O$ и $P \equiv G$. Затова по този начин няма как да се получи обобщение на задачата. Следователно точките P_1 , P_2 и P_3 трябва да се построят по друг начин.



Фигура 1

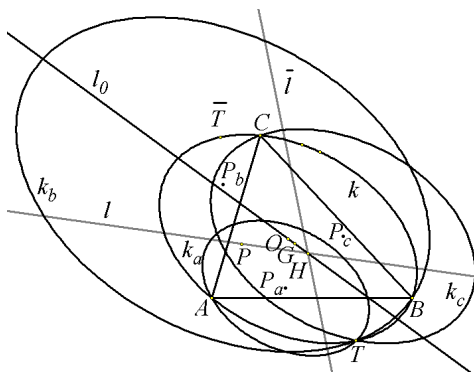
Нека M_a , M_b и M_c са средите съответно на страните BC , CA и AB . При симетрия спрямо някоя от правите BC , CA и AB образът на P образува с P права, която е успоредна на симетралата на съответната страна. Затова през P построяваме права p_1 , успоредна на OM_a , а след това върху правата p_1 построяваме точка P_1 така, че средата на отсечката PP_1 да лежи върху BC (фиг. 1). Аналогично по отношение на правите CA и AB построяваме съответно точките P_2 и P_3 . Сега, по описания по-горе начин, построяваме конични сечения k_a , k_b и k_c , които са описани съответно за триъгълниците AP_2P_3 , BP_3P_1 и CP_1P_2 . След извършване на всички тези построения за произволна точка P забелязваме следното

Твърдение 1. Ако P е произволна точка в равнината на ΔABC , коничните сечения k , k_a , k_b и k_c минават през една точка (фиг. 2, 3).

Нека сега точката H е такава, че $GH = -2.GO$. Тогава точките O , G и H лежат на права l_0 , която е обобщение на Ойлеровата права, поради което я наричаме *Ойлерова права, определена от кривата k* (Grozdev & Nenkov, 2014 a). Точката H притежава редица свойства, подобни на тези на ортоцентъра на ΔABC . Затова точката H наричаме *ортоид, определен от k* (Grozdev & Nenkov, 2014, a). Ако точката P описва правата l_0 , забелязваме, че коничните сечения k_a , k_b и k_c минават през постоянна точка T от k . По този начин получаваме обобщение на

формулираното по-рано твърдение за класическата Ойлерова права на $\triangle ABC$. Когато $P \equiv H$ (H е обобщение на ортоцентъра на $\triangle ABC$), кривите k_a , k_b и k_c съвпадат с k . Затова можем да предполагаме, че точката H има специален статут в извършените построения. Това означава, че може би всяка права през H притежава свойствата на Ойлеровата права l_0 . Наблюденията с GSP потвърждават тези предположения. По-точно наблюдава се следното

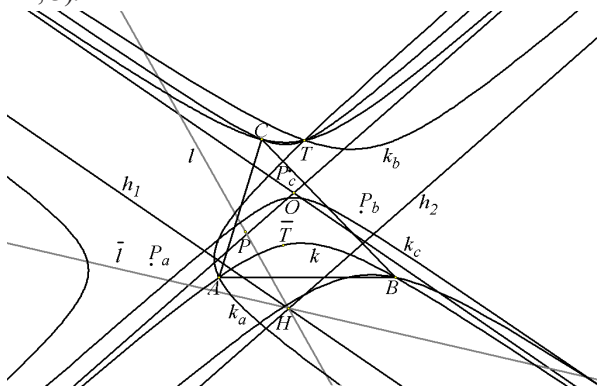
Твърдение 2. Ако l е произволна права през ортоида H , коничните сечения k_a , k_b и k_c минават през постоянна точка T от k (фиг. 2, 3).



Фигура 2

От твърдение 2 следва, че на всяка права l през H съответства точка T от k . Нека $\bar{l}$ е правата през H , която е спрегната с l спрямо k . На правата $\bar{l}$ съответства точка $\bar{T}$ от k . Точките T и $\bar{T}$ са свързани по следния начин:

Твърдение 3. Точките T и $\bar{T}$ са разположени диаметрално противоположно върху k (фиг. 2, 3).



Фигура 3

2. Доказателства и уточнения на формулираните твърдения

За да бъдат узаконени формулираните твърдения, те се нуждаят от строги доказателства. Тези доказателства ще извършим с помощта на барицентрични координати спрямо $\triangle ABC$, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ (Paskalev & Chobanov, 1985).

Нека координатните представяния на точките P и O са следните $P(\lambda, \mu, \nu)$ и $O(x_0, y_0, z_0)$, където $\lambda + \mu + \nu = 1$ и $x_0 + y_0 + z_0 = 1$. Оттук следва, че описаната крива k има следното уравнение

$$(1) \quad (1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)xy = 0.$$

Параметричните уравнения на правата p_1 , минаваща през P и успоредна на OM_a (фиг. 1), са следните

$$p_1: x = \lambda - 2x_0t_1, y = \mu + (1-2y_0)t_1, z = \nu + (1-2z_0)t_1.$$

От тези уравнения намираме координатите на пресечната точка P'_1 на p_1 с правата $BC: x = 0$ във вида $P'_1\left(0, \frac{(1-2x_0)\lambda + 2x_0\mu}{2x_0}, \frac{(1-2z_0)\lambda + 2x_0\nu}{2x_0}\right)$. От-

тук получаваме, че точката P_1 , която е симетрична на P спрямо P'_1 , има следното координатно представяне

$$(2) \quad P_1\left(-\lambda, \frac{(1-2y_0)\lambda + x_0\mu}{x_0}, \frac{(1-2z_0)\lambda + x_0\nu}{x_0}\right).$$

По същия начин се получават координатите на аналогичните точки P_2 и P_3 във вида

$$(3) \quad P_2\left(\frac{y_0\lambda + (1-2x_0)\mu}{y_0}, -\mu, \frac{z_0\nu + (1-2z_0)\mu}{y_0}\right), P_3\left(\frac{z_0\lambda + (1-2x_0)\nu}{z_0}, \frac{z_0\mu + (1-2y_0)\nu}{z_0}, -\nu\right).$$

За да определим спрегнатите прави s_2 и s_3 съответно на AP_2 и AP_3 през техните среди (фиг. 1), е необходимо да знаем спрегнатите направления на векторите AP_2 и AP_3 . В (Grozdev & Nenkov, 2015) е показано, че ако векторът $v(v_1, v_2, v_3)$ е спрегнат с вектора $u(u_1, u_2, u_3)$ спрямо k , то са изпълнени равенствата

$$(4) \quad \begin{aligned} v_1 &= (1-2x_0)[(y_0 - z_0)u_1 - x_0u_2 + x_0u_3], \\ v_2 &= (1-2y_0)[y_0u_1 + (z_0 - x_0)u_2 - y_0u_3], \\ v_3 &= (1-2z_0)[-z_0u_1 + z_0u_2 + (x_0 - y_0)u_3]. \end{aligned}$$

От (3) и (4) намираме спрегнатите направления на векторите $\overrightarrow{AP_2}$ и $\overrightarrow{AP_3}$, а от тях определяме параметричните уравнения на правите s_2 и s_3 във вида:

$$s_2 : \begin{cases} x = \frac{y_0(1+\lambda) + (1-2x_0)\mu}{2y_0} + (1-2x_0)[(1-y_0)(1-2z_0)\mu + (1-2y_0)y_0\nu]t_2, \\ y = -\frac{\mu}{2} - (1-2y_0)y_0[(1-2z_0)\mu + 2y_0\nu]t_2, \\ z = \frac{y_0\nu + (1-2z_0)\mu}{2y_0} + (1-2z_0)[(2y_0z_0 + 2x_0 - 1)\mu + (1-2y_0)y_0\nu]t_2, \end{cases}$$

$$s_3 : \begin{cases} x = \frac{z_0(1+\lambda) + (1-2x_0)\nu}{2z_0} + (1-2x_0)[(1-2z_0)z_0\mu + (1-z_0)(1-2y_0)\nu]t_3, \\ y = \frac{z_0\mu + (1-2y_0)\nu}{2z_0} + (1-2y_0)[(1-2z_0)z_0\mu + (2y_0z_0 + 2x_0 - 1)\nu]t_3, \\ z = -\frac{\nu}{2} - (1-2z_0)z_0[2z_0\mu + (1-2y_0)\nu]t_3. \end{cases}$$

От последните уравнения намираме координатите на пресечната точка P_a на правите s_2 и s_3 във вида:

$$(5) P_a \left(\frac{(1-2y_0)(1-2z_0)\lambda + (1-2z_0)(x_0 - y_0)\mu + (1-2y_0)(x_0 - z_0)\nu}{(1-2y_0)(1-2z_0)}, \frac{y_0\nu}{1-2z_0}, \frac{z_0\mu}{1-2y_0} \right).$$

От (4) и (5) лесно се вижда, че векторът, определен от средата на отсечката P_2P_3 и точката P_a , е спрегнат с вектора $\overline{P_2P_3}$. Следователно правата, минаваща през средата на P_2P_3 и спрегната с $\overline{P_2P_3}$ спрямо k , минава през P_a . Затова точката P_a разглеждаме като център на описано около ΔAP_2P_3 конично сечение k_a . Аналогично определяме точките P_b и P_c като центрове на описани съответно около триъгълниците BP_3P_1 и CP_1P_2 конични сечения k_b и k_c . Техните координати са следните:

$$(6) P_b \left(\frac{x_0\nu}{1-2z_0}, \frac{(1-2x_0)(y_0 - x_0)\lambda + (1-2z_0)(1-2x_0)\mu + (1-2z_0)(y_0 - z_0)\nu}{(1-2z_0)(1-2x_0)}, \frac{z_0\lambda}{1-2x_0} \right),$$

$$P_c \left(\frac{x_0\mu}{1-2y_0}, \frac{y_0\lambda}{1-2x_0}, \frac{(1-2x_0)(z_0 - x_0)\lambda + (1-2y_0)(z_0 - y_0)\mu + (1-2x_0)(1-2y_0)\nu}{(1-2x_0)(1-2y_0)} \right).$$

Сега ще намерим уравнението на кривата k_a . За целта разглеждаме координати и спрямо ΔAP_2P_3 . Ако точка M има координати (x, y, z) спрямо ΔABC и координати (x', y', z') спрямо ΔAP_2P_3 , от (3) следва, че връзките между тези координати се изразяват с равенствата:

$$\begin{aligned}
 (7) \quad x &= x' + \frac{y_0 \lambda + (1-2x_0) \mu}{y_0} y' + \frac{z_0 \lambda + (1-2x_0) \nu}{z_0} z', \\
 y &= -\mu y' + \frac{z_0 \mu + (1-2y_0) \nu}{z_0} z', \\
 z &= \frac{y_0 \nu + (1-2z_0) \mu}{y_0} y' - \nu z', \\
 (8) \quad x' &= \frac{tx + [t - (1-2z_0)z_0\mu - 2y_0z_0\nu]y + [t - x_0y_0\mu - (1-2y_0)y_0\nu]z}{t}, \\
 y' &= \frac{y_0z_0\nu y + [z_0\mu + (1-2y_0)\nu]y_0z}{t}, \\
 z' &= \frac{[(1-2z_0)\mu + y_0\nu]z_0y + y_0z_0\mu z}{t},
 \end{aligned}$$

където $t = (1-2z_0)z_0\mu^2 + (1-2y_0)(1-2z_0)\mu\nu + (1-2y_0)y_0\nu^2$.

Ако координатите на P_a спрямо ΔAP_2P_3 са (x'_a, y'_a, z'_a) , то от (5) и (8) следват равенствата

$$(9) \quad x'_a = \frac{2y_0z_0 + 2x_0 - 1}{(1-2y_0)(1-2z_0)}, \quad y'_a = \frac{y_0z_0}{(1-2y_0)(1-2z_0)}, \quad z'_a = \frac{y_0z_0}{(1-2y_0)(1-2z_0)}.$$

(Координатите (9) показват, че точката P_a лежи върху правата, минаваща през върха A и средата на отсечката P_2P_3 .)

Сега да обърнем внимание, че според (1) уравнението на k_a спрямо ΔAP_2P_3 е $(1-2x'_a)x'_ay'z' + (1-2y'_a)y'_bz'x' + (1-2z'_a)z'_cx'y' = 0$. В това уравнение заместваме равенствата (8) и (9). След известни преобразувания получаваме

$$(10) \quad k_a : -\{(1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)xy - [(1-2z_0)\lambda - (1-2x_0)\nu]z_0y + [(1-2y_0)\lambda - (1-2x_0)\mu]y_0z\}(x+y+z) = 0.$$

По аналогичен начин се получават уравненията на кривите k_b и k_c във вида

$$(11) \quad k_b : (1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)xy - \{[(1-2z_0)\mu - (1-2y_0)\nu]z_0x + [(1-2x_0)\mu - (1-2y_0)\lambda]x_0z\}(x+y+z) = 0,$$

$$(12) \quad k_c : (1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)xy - \{[(1-2y_0)\nu - (1-2z_0)\mu]y_0x + [(1-2x_0)\nu - (1-2z_0)\lambda]x_0y\}(x+y+z) = 0.$$

От уравненията (10), (11), (12) и резултатите, получени в (Grozdev & Nenkov, 2014, b), имаме

Следствие 1. Ако кривата k е елипса, то кривите k_a , k_b и k_c са елипси (фиг. 2).

Следствие 2. Ако кривата k е хипербола, то кривите k_a , k_b и k_c са хиперболи (фиг. 3, 4).

По-нататък от (1) и (10) следва, че кривите k и имат обща точка $T(x_T, y_T, z_T)$, чиито координати се изразяват с формулите:

$$(13) \quad \begin{aligned} x_T &= \frac{[(1-2z_0)\lambda - (1-2x_0)\nu][(1-2y_0)\lambda - (1-2x_0)\mu]x_0}{\tau}, \\ y_T &= \frac{[(1-2z_0)\mu - (1-2y_0)\nu][(1-2x_0)\mu - (1-2y_0)\lambda]y_0}{\tau}, \\ z_T &= \frac{[(1-2y_0)\nu - (1-2z_0)\mu][(1-2x_0)\nu - (1-2z_0)\lambda]z_0}{\tau}. \end{aligned}$$

където

$$(14) \quad \begin{aligned} \tau &= [(1-2z_0)\lambda - (1-2x_0)\nu][(1-2y_0)\lambda - (1-2x_0)\mu]x_0 \\ &+ [(1-2z_0)\mu - (1-2y_0)\nu][(1-2x_0)\mu - (1-2y_0)\lambda]y_0 + \\ &+ [(1-2y_0)\nu - (1-2z_0)\mu][(1-2x_0)\nu - (1-2z_0)\lambda]z_0. \end{aligned}$$

От (11), (12) и (13) лесно се вижда, че точката T лежи и върху кривите k_b и k_c . С това твърдение 1 е доказано.

Ако правата l минава през ортоида $H(1-2x_0, 1-2y_0, 1-2z_0)$ и е колинеарна с вектора $(\alpha \ \beta \ \gamma) (\alpha + \beta + \gamma = 0)$, нейните параметрични уравнения са следните

$$(15) \quad l: x = 1 - 2x_0 + \alpha\rho, \ y = 1 - 2y_0 + \beta\rho, \ z = 1 - 2z_0 + \gamma\rho.$$

Когато P лежи върху l , от (15) следва, че при подходяща стойност на параметъра ρ са изпълнени равенствата $\lambda = 1 - 2x_0 + \alpha\rho$, $\mu = 1 - 2y_0 + \beta\rho$ и $\nu = 1 - 2z_0 + \gamma\rho$. Заместваме тези равенства в (13) и получаваме:

$$(16) \quad \begin{aligned} x_T &= -\frac{[2y_0\alpha + (1-2x_0)\beta][2z_0\alpha + (1-2x_0)\gamma]x_0}{(1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta}, \\ y_T &= -\frac{[2z_0\beta + (1-2y_0)\gamma][2x_0\beta + (1-2y_0)\alpha]y_0}{(1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta}, \\ z_T &= -\frac{[2x_0\gamma + (1-2z_0)\alpha][2y_0\gamma + (1-2z_0)\beta]z_0}{(1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta}. \end{aligned}$$

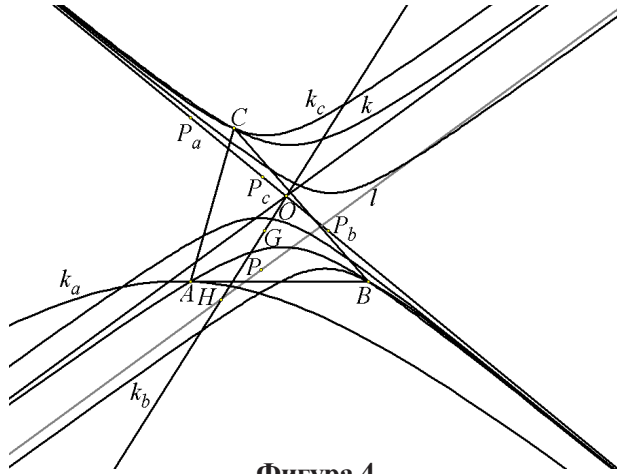
Координатите (16) зависят от координатите на вектора $\vec{l}$, но не зависят от параметъра ρ . Поради това точката T зависи от правата l , но не зависи от положението на точката P върху нея. С това твърдение 2 е доказано.

Ако k е хипербола, от следствие 2 следва, че k_a , k_b и k_c също са хиперболи. Когато k е хипербола и векторът $l(\alpha, \beta, \gamma)$ е колинеарен с асимптота на k (фиг. 4), координатите на l удовлетворяват равенството

$$(17) \quad (1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta = 0.$$

От (16) и (17) следва, че когато правата l е успоредна на някоя асимптота на хиперболатата k , общата точка на кривите k , k_a , k_b и k_c е безкрайна. Формулираме това заключение във вид на следното

Следствие 3. Ако правата l е успоредна на асимптота на хиперболатата k , четирите хиперболи k , k_a , k_b и k_c имат обща асимптота (фиг. 4).



Фигура 4

Кривата k е хипербола тогава и само тогава, когато числото $\Delta = \sqrt{-(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)}$ е реално. Освен това векторите $((1-3x_0)\Delta + (1-2x_0)(y_0 - z_0), (1-3y_0)\Delta + (1-2y_0)(z_0 - x_0), (1-3z_0)\Delta + (1-2z_0)(x_0 - y_0))$, $((1-3x_0)\Delta - (1-2x_0)(y_0 - z_0), (1-3y_0)\Delta - (1-2y_0)(z_0 - x_0), (1-3z_0)\Delta - (1-2z_0)(x_0 - y_0))$ са колинеарни с асимптотите на k . Следователно уравненията на асимптотите x_1 и x_2 на хиперболатата k имат следните уравнения:

$$\begin{aligned} & [(y_0 - z_0)\Delta + (1-2y_0)y_0 + (1-2z_0)z_0 - 6x_0y_0z_0]x + \\ & + [(z_0 - x_0)\Delta + (1-2z_0)z_0 + (1-2x_0)x_0 - 6x_0y_0z_0]y + \\ & x_1 : + [(x_0 - y_0)\Delta + (1-2x_0)x_0 + (1-2y_0)y_0 - 6x_0y_0z_0]z = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[(y_0 - z_0) \Delta - (1 - 2y_0) y_0 - (1 - 2z_0) z_0 + 6x_0 y_0 z_0 \right] x + \\ x_2 : & \left[(z_0 - x_0) \Delta - (1 - 2z_0) z_0 - (1 - 2x_0) x_0 + 6x_0 y_0 z_0 \right] y + \\ & + \left[(x_0 - y_0) \Delta - (1 - 2x_0) x_0 - (1 - 2y_0) y_0 + 6x_0 y_0 z_0 \right] z = 0. \end{aligned}$$

Правите h_1 и h_2 , минаващи през H и успоредни съответно на x_1 и x_2 (те са колинеарни със съответните им направляващи вектори посочени по-горе) (фиг. 3), имат следните уравнения:

$$h_1 : u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0, h_2 : u_2 x + v_2 y + w_2 z = 0,$$

където

$$(18) \quad \begin{aligned} u_1 &= (y_0 - z_0) \Delta + (1 - 3x_0)(1 - 2y_0)(1 - 2z_0), v_1 = (z_0 - x_0) \Delta + (1 - 2x_0)(1 - 3y_0)(1 - 2z_0), \\ w_1 &= (x_0 - y_0) \Delta + (1 - 2x_0)(1 - 2y_0)(1 - 3z_0), u_2 = (y_0 - z_0) \Delta - (1 - 3x_0)(1 - 2y_0)(1 - 2z_0), \\ v_2 &= (z_0 - x_0) \Delta - (1 - 2x_0)(1 - 3y_0)(1 - 2z_0), w_2 = (x_0 - y_0) \Delta - (1 - 2x_0)(1 - 2y_0)(1 - 3z_0). \end{aligned}$$

От следствие 3 следва, че центровете O , P_a , P_b и P_c съответно на хиперболите k , k_a , k_b и k_c лежат на една права, която е асимптота на k (фиг. 4). Ако заместим $\lambda = 1 - \mu - \nu$, $x_0 = 1 - y_0 - z_0$ и координатите (5) на точката P_a в уравнението на x_1 , получаваме следния израз за ν :

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{(1 - 2z_0)}{y_0(1 - 2y_0)[(1 - 3z_0)\Delta + (1 - 2z_0)(x_0 - y_0)]} \left\{ [(1 - 3y_0)z_0\mu + (1 - 2y_0)(y_0 - z_0)]\Delta - \right. \\ & \left. - z_0(1 - 2y_0)(z_0 - x_0)\mu + (1 - 2y_0)[2(1 - 3z_0)y_0^2 + 2(1 - 3y_0)z_0^2 + 6x_0y_0 - y_0 - z_0] \right\}. \end{aligned}$$

От (13) следва, че когато T е безкрайна точка, нейните координати се представят във вида

$$\begin{aligned} x_T &= [(1 - 2z_0)\lambda - (1 - 2x_0)\nu][[(1 - 2y_0)\lambda - (1 - 2x_0)\mu]x_0, \\ y_T &= [(1 - 2z_0)\mu - (1 - 2y_0)\nu][[(1 - 2x_0)\mu - (1 - 2y_0)\lambda]y_0, \\ z_T &= [(1 - 2y_0)\nu - (1 - 2z_0)\mu][[(1 - 2x_0)\nu - (1 - 2z_0)\lambda]z_0. \end{aligned}$$

В тези координати заместваем $\lambda = 1 - \mu - \nu$, $x_0 = 1 - y_0 - z_0$ и получената стойност за ν . Така получаваме следните равенства

$$\begin{aligned} x_T &= - \frac{z_0 x_0 (1 - 2z_0) (\mu - 1 + 2y_0)^2}{y_0 (1 - 2y_0) [(1 - 3z_0)\Delta + (1 - 2z_0)(x_0 - y_0)]^2} \times \\ & \times [(z_0 - x_0)\Delta - (1 - 2x_0)(1 - 3y_0)(1 - 2z_0)][(x_0 - y_0)\Delta - (1 - 2x_0)(1 - 2y_0)(1 - 3z_0)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_T &= -\frac{z_0(1-2z_0)(\mu-1+2y_0)^2[(z_0-x_0)\Delta-(1-2x_0)(1-3y_0)(1-2z_0)]}{y_0[(1-3z_0)\Delta+(1-2z_0)(x_0-y_0)]^2} \times \\
 &\times \left\{ (y_0-z_0)\Delta - [2(1-3z_0)y_0^2 + 2(1-3y_0)z_0^2 + 6x_0y_0 - y_0 - z_0] \right\}, \\
 z_T &= -\frac{z_0(1-2z_0)^2(\mu-1+2y_0)^2[(x_0-y_0)\Delta-(1-2x_0)(1-2y_0)(1-3z_0)]}{y_0(1-2y_0)[(1-3z_0)\Delta+(1-2z_0)(x_0-y_0)]^2} \times \\
 &\times \left\{ (y_0-z_0)\Delta - [2(1-3z_0)y_0^2 + 2(1-3y_0)z_0^2 + 6x_0y_0 - y_0 - z_0] \right\}.
 \end{aligned}$$

Накрая чрез току-що получените изрази за x_T , y_T и z_T установяваме, че е изпълнено равенството $u_2x_T + v_2y_T + w_2z_T = 0$, което означава, че T е безкрайната точка на правата h_2 . Така получихме следното уточнение на следствие 3.

Следствие 4. Ако правата l е успоредна на едната асимптота на хиперболатата k , то другата ѝ асимптота е обща асимптота за хиперболите k , k_a , k_b и k_c (фиг. 4).

Трябва да отбележим още, че когато k е хипербола, изразът за τ от (14) се

представя по следния начин $\tau = \frac{(u_1\lambda + v_1\mu + w_1\nu)(u_2\lambda + v_2\mu + w_2\nu)}{4[(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0) - x_0y_0z_0]}$, където

u_i , v_i и w_i ($i=1,2$) се изразяват с равенствата (18). Освен това правите h_1 и h_2 са хармонично спрегнати спрямо правите l и $\bar{l}$ (фиг. 3).

Накрая от (4) и (16) следва, че точката $\bar{T}$, която съответства на правата $\bar{l}$, спрегната с l спрямо k , има следните координати

$$\begin{aligned}
 x_{\bar{T}} &= \frac{(1-2x_0)x_0\beta\gamma}{(1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta}, \\
 y_{\bar{T}} &= \frac{(1-2y_0)y_0\gamma\alpha}{(1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta}, \\
 z_{\bar{T}} &= \frac{(1-2z_0)z_0\alpha\beta}{(1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta}.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

От (16) и (19) следват равенствата $x_T + x_{\bar{T}} = 2x_0$, $y_T + y_{\bar{T}} = 2y_0$ и $z_T + z_{\bar{T}} = 2z_0$. Следователно точките T и $\bar{T}$ са симетрични спрямо O (фиг. 2, 3). С това е доказано и твърдение 3.

От твърдение 3 следва

Следствие 5. Ако $k \equiv G$ е описаната около $\triangle ABC$ окръжност, то на всеки две перпендикулярни прави, минаващи през ортоцентъра на $\triangle ABC$, съответстват диаметрално противоположни точки от G .

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014, a). Generalizations of some classical theorems of the triangle geometry (In Russian). *Theoretical and applied aspects of mathematics, informatics and education. Proceedings of the International Scientific Conference, Archangelsk, SAFU*, 35-54. (ISBN 978-5-261-00990-0) [Гроздев, С. & В. Ненков. (2014, 1). Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. *Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования. Сборник материалов международной научной конференции. Архангельск, САФУ*, 35-54. (ISBN 978-5-261-00990-0).]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014, b). Homothetic conics in the triangle plane (In Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 2, 139 – 154. [Гроздев, С. & В. Ненков (2014, b). Хомотетични конични сечения в равнината на триъгълник. *Математика и информатика*, 2, 139 – 154.]
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2015). Geometric construction of Ceva curve (In Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 1, 52 – 57. [Гроздев, С. & В. Ненков (2015). Геометрична конструкция на крива на Чева, *Математика и информатика*, 1, 52 – 57.]
- Mateev, A. (1977). *Projective Geometry* (In Bulgarian). Sofia: Nauka i Izkustvo. [Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство.]
- Pascalev, G. & I. Chobanov (1985). *Notable points in the triangle* (In Bulgarian). Sofia: Narodna Prosveta. [Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.]

CENTRAL CONIC TRIPLETS THROUGH A FIXED POINT ON A FIXED CONIC

Abstract. The paper presents a generalization of a problem for circles through a fixed point in the plane of a given triangle.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**
University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
E-mail: vnenkov@mail.bg