

ТРИГОНОМЕТРИЧНИ СУБСТИТУЦИИ ПРИ НЯКОИ АЛГЕБРИЧНИ ЗАДАЧИ

Диана Стефанова

ОУ „Никола Вапцаров“ – Асеновград

Резюме. Статията е посветена на решаване на алгебрични задачи, като се използват субституции с тригонометричните функции. Предложени са подходи за решаването им.

Ключови думи: тригонометрично заместване; уравнение; доказателства за неравенства

В настоящата статия разглеждаме някои рационални уравнения и доказателства на рационални неравенства, които се решават чрез използването на субституции с тригонометрични функции. Предложените задачи са подходящи за ученици и студенти, проявяващи интерес към математиката, и спомагат за повишаване нивото на подготовка за различни математически конкурси, олимпиади и други. За да се решат тези задачи, необходимо е много добро владение на решаването на различните групи рационални уравнения и доказателства на рационални неравенства. Освен това читателят трябва да знае свойствата на тригонометричните функции. Разгледаните задачи допринасят за усъвършенстване уменията на учениците и студентите; усвояване от тях на различни математически дейности в различни ситуации; повишаване на математическата култура и интелектуалното им развитие. Целта е обвързване на знанията за рационални уравнения и неравенства и тригонометрични функции. Формират се умения за пренос на знания и обратно. Освен това, за да открият различните връзки, учениците и студентите упражняват методи на научно познание, убеждават се в тяхното значение и у тях се поражда стремеж за овладяването им. Всичко това е необходимо на творческата личност в условията на съвременния живот, когато трябва умело да се използват знанията от една област на науката в друга. Сред рационалните уравнения и доказателства на рационални неравенства има такива, които трудно биха се решили от учениците със знанията, които имат, а използването на субституции с тригонометрични функции води до по-рационално решение. Невинаги е лесно да се забележи връзката между алгебричните изрази и тригонометричните формули. Това, което обединява задачите от този вид, е, че се търсят решения в интервал, който е подмножество на $[-1; 1]$. Затова се определя общ начин при

решаването им. Поради изискването $x \in M \subset [-1; 1]$ забелязваме, че можем да въведем ново неизвестно φ , като положим $x = \sin \varphi$ или $x = \cos \varphi$ (или друга подходяща за конкретната задача тригонометрична функция на φ). Когато използваме този метод, се получават кратки, лесни и идейно по-ясни решения. Дефиниционното множество не е единственото съображение, от което трябва да се ръководим при използване на подобни субституции. Друго важно съображение е, че те водят до удобни тригонометрични преобразувания, понижаващи степента на уравнението. Могат да се посочат още много други примери, където тригонометрията помага на алгебрата. Невинаги опитите да се направи такова приложение, водят до положителен резултат, но намирането на едно красиво решение оправдава усилията.

Тук предлагаме примери, които илюстрират конкретни приложения на разгледаните идеи. Затова на вашето внимание предлагаме един начин за решаване рационални уравнения и доказателства на рационални неравенства. Той е свързан с използване на метода на тригонометрични субституции. Казаното ще илюстрираме при решаване на следните задачи.

Задача 1. Да се намерят тези корени на уравнението $8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$, които са от интервала $(0, 1)$. (Конкурсен изпит за постъпване в МГУ, Москва, 1985 г.)

Решение. Преобразуваме уравнението по следния начин $8x(2x^2 - 1)(2(2x^2 - 1)^2 - 1) = 1$, защото израз от вида $2x^2 - 1$ се среща в тригонометрията като формулата $\cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1$ и тъй като $0 < x < 1$, то може да се положи $x = \cos \varphi$, където $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тогава даденото уравнение може да се преобразува в следния вид: $8\cos \varphi (2\cos^2 \varphi - 1)(8\cos^4 \varphi - 8\cos^2 \varphi + 1) = 1$ или $8\cos \varphi \cos 2\varphi (-8\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 1) = 1$, а оттам и до $8\cos \varphi \cos 2\varphi (1 - 2\sin^2 2\varphi) = 1$. В това уравнение можем да умножим двете му страни със $\sin \varphi$, защото $\varphi = 0 (x \neq 0)$ не е корен, т.е. $8\cos \varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot \cos 4\varphi = 1 / \sin \varphi$ и получаваме равносилното уравнение $8\cos \varphi \cdot \sin \varphi \cos 2\varphi \cdot \cos 4\varphi = \sin \varphi$ или $4\sin 2\varphi \cos 2\varphi \cdot \cos 4\varphi = \sin \varphi \Rightarrow 2\sin 4\varphi \cdot \cos 4\varphi = \sin \varphi \Rightarrow \sin 8\varphi = \sin \varphi$.

Ако $\sin 8\varphi = \sin \varphi \Rightarrow 2\cos \frac{9\varphi}{2} \sin \frac{7\varphi}{2} = 0$, то решения са $\varphi_1(n) = \frac{\pi(2n+1)}{9}$ и $\varphi_2(n) = \frac{2n\pi}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$. Откъдето намираме $\varphi_1(0) = \frac{\pi}{9}$, $\varphi_1(1) = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_1(2) = \frac{5\pi}{9}$, $\varphi_1(3) = \frac{7\pi}{9}$, $\varphi_2(1) = \frac{2\pi}{7}$, $\varphi_2(2) = \frac{4\pi}{7}$, $\varphi_2(3) = \frac{6\pi}{7}$. Но само

$\varphi_1(0) = \frac{\pi}{9}$, $\varphi_1(1) = \frac{\pi}{3}$ и $\varphi_2(1) = \frac{2\pi}{7}$ отговарят на условието на задачата. Тогава даденото уравнение има три корена, които лежат в интервала $(0,1)$ и те са $x_1 = \cos \frac{2\pi}{7}$, $x_2 = \cos \frac{\pi}{9}$ и $x_3 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. (Choocheva, & D. Nikolov, 1988).

Задача 2. Да се реши уравнението $2(2x^2 - 1)^2 - 1 = x$.

Решение. В това уравнение използването на тригонометрични функции не е очевидно, затова отначало ще покажем, че числа, чиято абсолютна стойност е по-голяма от единица, не могат да бъдат решения на даденото уравнение. Нека $|x| > 1$, тогава преобразуваме даденото уравнение във вида $2x^2 - 1 = x^2 + x^2 - 1 \Rightarrow 2x^2 - 1 > x^2 > |x|$, а $2(2x^2 - 1)^2 - 1 > |2x^2 - 1| > |x|$. Като положим $x = \cos \varphi$, където $\varphi \in [0; \pi]$, получаваме уравнението $2(2\cos^2 \varphi - 1)^2 - 1 = \cos \varphi$. От тригонометричната формула $2\cos^2 \delta - 1 = \cos 2\delta$ лявата част на полученото уравнение е равна на $\cos 4\varphi$, затова уравнението добива вида $\cos 4\varphi = \cos \varphi$, от където $\pm 4\varphi = \varphi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$. След което $\varphi = \frac{2\pi n}{5}$ и $\varphi = \frac{2\pi n}{3}$. В интервала $[0; \pi]$ принадлежат само решенията $0; \frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}$. Всички корени са различни и тогава даденото уравнение има корените: $-\frac{1}{2}; 1; \cos \frac{2\pi}{5}; \cos \frac{4\pi}{5}$.

Задача 3. Да се реши уравнението $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

Решение. Очевидно е, че $x = 0$ не е корен на даденото уравнение, тогава разделяме двете страни на даденото уравнение на $2x$ и то приема вида $4x^2 = \frac{1}{2x} + 3$ (1). Ако $x < -1$ или $x > 1$, то лявата страна на (1) ще бъде по-голяма от 4, а дясната – по-малка от 4. Следователно корените на даденото уравнение ще са в интервала $-1 \leq x \leq 1$. Нека положим $x = \cos \varphi$, където $0 \leq \varphi \leq \pi$. Тогава даденото уравнение приема вида на тригонометричното уравнение $8\cos^3 \varphi - 6\cos \varphi - 1 = 0$, на което делим двете му страни на 2 и получаваме $4\cos^3 \varphi - 3\cos \varphi = \frac{1}{2}$ или $\cos 3\varphi = \frac{1}{2}$. След това намираме $\varphi = \frac{\pi}{9}(6n \pm 1)$, където n е цяло число. Тъй като $0 \leq \varphi \leq \pi$, то $\varphi_1 = \frac{\pi}{9}$, $\varphi_2 = \frac{5\pi}{9}$ и $\varphi_3 = \frac{7\pi}{9}$, но $x = \cos \varphi$, тогава корените на даденото урав-

нение са $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}$, $x_2 = \cos \frac{5\pi}{9}$ и $x_3 = \cos \frac{7\pi}{9}$ (Zapryanov, Z. & N. Raikov, 2012).

Задача 4. Колко на брой корени има уравнението $4\sqrt{2}|x|(x^2-1)(2x^4-4x^2+1)=1$ в интервала $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$?

Решение. (Merzlyak, A, 1994) Тъй като с лявата страна на даденото уравнение се дефинира четна функция, достатъчно е да се намери броят на корените му в интервала $[0, \sqrt{2}]$. Чрез непосредствена проверка установяваме, че $x=0$ и $x=\sqrt{2}$ не са корени на даденото уравнение. Полагаме $x = \sqrt{2} \cos \varphi$, където $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тогава даденото уравнение може да се преобразува в следния вид: $8 \cos \varphi (2 \cos^2 \varphi - 1)(8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1) = 1$ или $8 \cos \varphi \cos 2\varphi (-8 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi + 1) = 1$, а оттам и до $8 \cos \varphi \cos 2\varphi (1 - 2 \sin^2 2\varphi) = 1 \Rightarrow 8 \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot \cos 4\varphi = 1 / \sin \varphi$ (това може да се направи, тъй като $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и получаваме равносилното уравнение $8 \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cos 2\varphi \cdot \cos 4\varphi = \sin \varphi$ или $4 \sin 2\varphi \cos 2\varphi \cdot \cos 4\varphi = \sin \varphi \Rightarrow 2 \sin 4\varphi \cdot \cos 4\varphi = \sin \varphi \Rightarrow \sin 8\varphi = \sin \varphi$. Ако $\sin 8\varphi = \sin \varphi$, то $\varphi = \frac{2k\pi}{7}$ и $\varphi = \frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{9}$, k и n са цели числа. От първата серия остава само един корен, а от втората – два. Така в интервала $[0, \sqrt{2}]$ имаме три корена, следователно в интервала $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ са шест.

Задача 5. Да се реши уравнението $64x^3 - 96x^2 + 36x - 1 = 0$.

Решение. В тази задача, ще положим $x = \frac{1 + \cos \varphi}{2}$. Тогава получаваме $64 \left(\frac{1 + \cos \varphi}{2} \right)^3 - 96 \left(\frac{1 + \cos \varphi}{2} \right)^2 + 36 \left(\frac{1 + \cos \varphi}{2} \right) - 1 = 0$, а като го преобразуваме $8 \cos^3 \varphi - 6 \cos \varphi + 1 = 0$, което води до $\cos 3\varphi = -\frac{1}{2}$. След това намираме $\varphi = \frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}$, а оттам – и корените на даденото уравнение $\cos^2 \frac{\pi}{9}; \cos^2 \frac{2\pi}{9}; \cos^2 \frac{4\pi}{9}$.

Задача 6. Да се докаже, че ако $x^2 + y^2 = 1$, то

а) $|x + y| \leq \sqrt{2}$; б) $|3x + 4y| \leq 5$; в) $|x^3y - xy^3| \leq \frac{1}{4}$.

Доказателство. Тъй като $x^2 + y^2 = 1$, а в тригонометрията имаме, че $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, то можем да използваме субституцията $x = \sin \varphi$, $y = \cos \varphi$, където $\varphi \in [-\pi; \pi]$.

а) Тогава $x + y = \cos \varphi + \sin \varphi = \sin(90^\circ - \varphi) + \sin \varphi = 2 \sin 45^\circ \cos(\varphi - 45^\circ) = \sqrt{2} \cos(\varphi - 45^\circ)$. Оттук, тъй като $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, то $|x + y| \leq \sqrt{2}$.

б) Като съобразим, че $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ и $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Разглеждаме $|3x + 4y| = 5|\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha| = 5|\sin(\varphi + \alpha)| \leq 5$. Следователно $|3x + 4y| \leq 5$.

в) Разглеждаме $|x^3y - xy^3| = |\cos^3 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi| = |\sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)| = \left|\frac{1}{2} \sin 2\varphi \cos 2\varphi\right| = \left|\frac{1}{4} \sin 4\varphi\right| \Rightarrow |x^3y - xy^3| \leq \frac{1}{4}$.

Задача 7. Да се докаже, че $\left| \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| \leq \frac{1}{2}$.

Доказателство. Ще използваме субституцията $x = \operatorname{tg} \alpha$ и $y = \operatorname{tg} \beta$. (Merzlyak, A., 1994). В този случай

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)} = \frac{\frac{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \cos \alpha \cos \beta}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta}} = \\ &= \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \sin 2(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

но тъй като

$$\left| \frac{1}{2} \sin 2(\alpha + \beta) \right| \leq \frac{1}{2} \text{ следователно } \left| \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Задача 8. Да се докаже, че $8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4$.

Доказателство. Ако $b = 0$, (Savova, B, 1988) неравенството е в сила, а ако $b \neq 0$ и се положи $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$, решението на задачата се свежда до доказателство на неравенството $8(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \geq (\sin \varphi + \cos \varphi)^4$. Преобразува се раз-

ликата $8(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) - (\sin \varphi + \cos \varphi)^4 = 7 - 2 \sin 2\varphi - 5 \sin^2 2\varphi \geq 0$.
Равенство се получава при $\sin 2\varphi = 1$, откъдето $\varphi = \frac{\pi}{4}$, т.е. $a = b$.

Задача 9. Да се докаже, че сред всички цели числа може да се намерят две числа x, y , за които е вярно неравенството $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Доказателство. Нека $x_k = \operatorname{tg} \varphi_k$, където $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Ще разделим интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ на шест равни части. Съгласно принципа на Дирихле от φ_k поне две принадлежат на един от тези интервали, следователно $0 \leq \varphi_i - \varphi_j \leq \frac{\pi}{6}$; като отчетем последното, ще получим $0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} = \operatorname{tg}(\varphi_i - \varphi_j) \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 10. Докажете неравенството $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{n}{3}$, където $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$ и $x_i \in [-1, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказателство. Нека $x_i = \sin \varphi_i$. Разглеждаме $\sum_{i=1}^n (3 \sin \varphi_i - 4 \sin^3 \varphi_i) = \sum_{i=1}^n \sin 3\varphi_i$, следователно $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \sin 3\varphi_i \leq \frac{n}{3}$.

Задача 11. Да се докаже, че ако $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Доказателство. Разглеждаме $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{|x|}{1+|x|^2} + \frac{|y|}{1+|y|^2} + \frac{|z|}{1+|z|^2}$, като $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$. Нека $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$, $z = \operatorname{tg} \gamma$, където $\alpha, \beta, \gamma \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Ще използваме, че $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$, тогава $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha \leq 1$, откъдето $\operatorname{tg} \gamma \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \leq 1$ или $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \leq \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$, следователно $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2} - \gamma$, т.е. $\alpha + \beta + \gamma \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Забелязваме, че } \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) \leq \frac{1}{2} \cdot 3 \sin \frac{2\alpha + 2\beta + 2\gamma}{3} \leq \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Решавайки горните задачи и подобни на тях, ученикът пренася знания за решаването на проблеми, които нямат очевидна връзка, което е предпоставка за създаване на условия за активизиране на учебната му дейност. Важното е да се създадат благоприятни ситуации за обучение чрез задачи. По-трудното и най-важното е да се намират подходящи методи за математическа активност независимо от степента на подготовка. Това пък води до развитие на различни механизми на мислене, необходими за откриване, за творчество и за приложение на идеи.

ЛИТЕРАТУРА

- Запрянов, З. & Н. Райков. (2012). *Как да решаваме лесно трудни задачи*. София: Просвета.
- Мерзляк, А., Полонски & М. Якир. (1994). *Неочаквана стъпка или сто и тринадесет красиви задачи*. София: Марин Дринов. ISBN 954-430-289-1.
- Савова, Б. (1988). Решаване на някои алгебрични задачи с помощта на тригонометрия или вектори. *Обучението по математика и информатика*, 5, 39 – 42.
- Севрюков, П. & А. Смоляков, (2008), *Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства*. Москва. ISBN 978-5-93078-567-8.
- Чочева, С. & Д. Николов. (1988). Тригонометрични субституции. *Математика*, 8, 8 – 12.

REFERENCES

- Zapryanov, Z. & Raikov, N. (2012). *How to solve difficult problems easily*. Sofia: Prosveta [in Bulgarian].
- Merzlyak, A., Polonian, A. & Yakir, M. (1994). *Unexpected step or one hundred and thirteen beautiful tasks*. Sofia: Academic publishing House „Marin Drinov“ [in Bulgarian].
- Savova, B. (1988). Solve some algebraic tasks with the help of trigonometry or vectors. *Mathematics and Informatics*, 5, 39 – 42 [in Bulgarian].
- Sevrikov, P. & Smoljakov, A. (2008). *Trigonometric, exponential and logarithmic equations and inequalities*. Moscow: Prosveshtenie. (ISBN 978-5-93078-567-8) [in Russian].

Chocheva, S. & Nikolov, D. (1988). *Trigonometric Substitutions. Mathematics*, 8, 8 – 12 [in Bulgarian].

TRIGONOMETRIC SUBSTITUTIONS IN SOME ALGEBRAIC TASKS

Abstract. The article is dedicated to solving algebraic tasks, using substitutions with trigonometric functions. Approaches are proposed to solve such tasks.

Keywords: trigonometric substitutions; equations; evidence of inequalities

✉ **Dr. Diana Stefanova**

ORCID ID: 0000-0002-7156-7595

Teacher in Mathematics

Nikola Vaptzarov Primary School

116, Tsar Ivan Asen II St.

4230 Asenovgrad, Bulgaria

E-mail: dianastefanova13@gmail.com