

ТЕОРЕМАТА НА ФОНТЕНЕ ПО ОТНОШЕНИЕ НА ОПИСАНИ ЦЕНТРАЛНИ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Висше училище по застраховане и финанси

²Технически колеж – Ловеч

Резюме. В настоящата статия е описано едно обобщение на забележителната теорема на Фонтене от геометрията на триъгълника.

Keywords: triangle, conic, pedal circle, pedal curve, Feuerbach configuration, Euler curve.

1. Въведение. Настоящата работа е посветена на обобщаването на едно забележително твърдение от геометрията на триъгълника, наречено теорема на Фонтене. Формулировката на тази теорема е свързана с понятието педална окръжност на точка. Спрямо $\triangle ABC$ педална окръжност на точката P , нележаща върху описаната окръжност на $\triangle ABC$, се нарича окръжността, минаваща през петите на перпендикулярите, спуснати от P върху правите BC , CA и AB .

Теорема на Фонтене. Педалната окръжност на дадена точка P спрямо $\triangle ABC$ се допира до Ойлеровата окръжност на $\triangle ABC$ тогава и само тогава, когато центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, точката P и точката Q , изогонално спрегната на P спрямо $\triangle ABC$, са колинеарни.

Две доказателства на тази теорема, използващи комплексни числа, се съдържат в (Симеонов, 1996) и (Ненков, 1997), а синтетично доказателство се съдържа в (Ненков, 1996). Обобщението, което ще покажем, е свързано с обобщаването на някои понятия, които се съдържат явно или скрито във формулировката на теоремата на Фонтене. За целта е необходимо да припомним тези обобщени понятия.

Разглеждаме произволен триъгълник ABC . Спрямо $\triangle ABC$ ще използваме барицентрични координати, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Средите на страните BC , CA и AB означаваме съответно с $M_a\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ и $M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, а с $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ – медицентъра $\triangle ABC$. В равнината

на $\triangle ABC$ ще разглеждаме произволно конично сечение $\bar{k}(O)$ с център $O(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 + y_0 + z_0 = 1$). За пълнота ще разгледаме всички възможности за $\bar{k}(O)$ в зависимост от положението на центъра O в равнината на $\triangle ABC$.

2. Ойлерова крива, асоциирана с описана за триъгълника крива. Забележителната за триъгълника окръжност на Ойлер може да се обобщи спрямо произволна описана за $\triangle ABC$ крива в зависимост от положението на центъра O , както това е описано в разгледаните по-долу случаи.

2.1. Описана крива, центърът на която не лежи върху страна на триъгълника. Определяме правите h_a, h_b и h_c като минаващи съответно през върховете A, B и C и успоредни съответно на правите OM_a, OM_b и OM_c . Тези прави се пресичат в една точка $H(1-2x_0, 1-2y_0, 1-2z_0)$, която се получава от O посредством равенството $\overline{GH} = \frac{1}{2}\overline{GO}$. Ако $h_a \cap BC = A_1$, $h_b \cap CA = B_1$ и $h_c \cap AB = C_1$, то точките A_1, B_1, C_1, M_a, M_b и M_c лежат на едно конично сечение Ω , което наричаме *Ойлерова крива, асоциирана с $\bar{k}(O)$* (Гроздев & Ненков, 2014, 1). Уравнението на Ойлеровата крива може да се представи във вида:

$$(1) \quad \Omega(O): \begin{aligned} &(1-2y_0)(1-2z_0)(1-2x)x + (1-2z_0)(1-2x_0)(1-2y)y + \\ &+ (1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z)z = 0. \end{aligned}$$

2.2. Описана крива, центърът на която лежи върху страна на триъгълника. Нека $O \equiv M_c$ и $C_1(l, m, 0)$ ($l + m = 1$) е точка от правата AB . В този случай разглеждаме точката H като съвпадаща с C (равенството $\overline{GH} = \frac{1}{2}\overline{GO}$ е изпълнено и в този случай). Точките M_a, M_b, M_c, C и C_1 са различни и определят единствена крива от втора степен $\Omega(M_c, C_1)$, която наричаме *Ойлерова крива, асоциирана с $\bar{k}(O)$* . Уравнението на Ойлеровата крива може да се представи във вида:

$$(2) \quad \Omega(M_c, C_1): m(1-2x)x + l(1-2y)y = 0.$$

Случаите, когато $O \equiv M_a$ и $O \equiv M_b$, са аналогични.

Тъй като точката H във всички случаи е аналог на ортоцентъра, ще я наричаме *ортоид на $\triangle ABC$, определен от описаната крива $\bar{k}(O)$* (Гроздев & Ненков, 2014, 1).

3. Спрегнати точки, педални криви и Симсънови прави. Двойките изогонално спрегнати точки спрямо $\triangle ABC$ имат обща педална окръжност, спрямо центъра на която двете точки са симетрични. Освен това, когато една точка е от описаната за $\triangle ABC$ окръжност, педалната окръжност се заменя с права на Симсън. По отношение на произволно централно коничното сечение $\bar{k}(O)$ също се определят двойки спрегнати точки, педални криви и прави на Симсън.

3.1. Описана крива, центърът на която не лежи върху страна на триъгълника. Координатите на точките от $\bar{k}(O)$ удовлетворяват уравнението

$$(3) \quad \bar{k}(O): (1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)z_0xy = 0.$$

Нека $P(x_P, y_P, z_P)$ ($x_P + y_P + z_P = 1$) е точка от равнината на $\triangle ABC$, а правите p_a, p_b и p_c минават през P и са съответно успоредни на OM_a, OM_b и OM_c , като $P_a = p_a \cap BC$, $P_b = p_b \cap CA$ и $P_c = p_c \cap AB$. С s_a, s_b и s_c означаваме правите, които минават съответно през средите на отсечките P_bP_c, P_cP_a и P_aP_b , така че да са спрегнати съответно с правите P_bP_c, P_cP_a и P_aP_b спрямо $\bar{k}(O)$.

Ако точката P не лежи върху $\bar{k}(O)$, както следва от (3), изразът

$$(4) \quad \vartheta(P) = (1-2x_0)x_0y_Pz_P + (1-2y_0)y_0z_Px_P + (1-2z_0)z_0x_Py_P$$

е различен от нула, вследствие на което точките P_a, P_b и P_c образуват триъгълник. Тогава правите s_a, s_b и s_c се пресичат в една точка

$$W \left(\frac{\vartheta(P)x_P + (1-2x_0)x_0y_Pz_P}{2\vartheta(P)}, \frac{\vartheta(P)y_P + (1-2y_0)y_0z_Px_P}{2\vartheta(P)}, \frac{\vartheta(P)z_P + (1-2z_0)z_0x_Py_P}{2\vartheta(P)} \right),$$

която е център на описано за $\triangle P_aP_bP_c$ конично сечение π_P . Това конично сечение π_P наричаме *педална крива на точката P спрямо описаната крива $\bar{k}(O)$* (Гроздев & Ненков, 2014, 2).

Нека педалната крива π_P пресича за втори път правите BC, CA и AB съответно в точки Q_a, Q_b и Q_c . Правите, минаващи през Q_a, Q_b и Q_c , които са съответно успоредни на OM_a, OM_b и OM_c , се пресичат в една точка $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, чиито координати са следните:

$$(5) \quad x_Q = \frac{(1-2x_0)x_0y_Pz_P}{\vartheta(P)}, \quad y_Q = \frac{(1-2y_0)y_0z_Px_P}{\vartheta(P)}, \quad z_Q = \frac{(1-2z_0)z_0x_Py_P}{\vartheta(P)},$$

където $\vartheta(P)$ се изразява с равенството (4) (Гроздев & Ненков, 2014, 2).

Точката Q е симетрична на P спрямо центъра W . Освен това правите, които минават съответно през средите на отсечките Q_bQ_c, Q_cQ_a и Q_aQ_b , така че да са спрегнати съответно с правите Q_bQ_c, Q_cQ_a и Q_aQ_b , се пресичат в точката W . Следователно педалната крива π_Q на Q съвпада с π_P , т.е. точките P и Q имат обща педална крива, която ще означаваме още и с $\pi(P, Q)$. Тези свойства на точката Q (които са аналогични на свойствата на изогонално спрегнатите) ни дават основание да я наречем *спрегната на P спрямо $\bar{k}(O)$* . Разбира се, спрегнатата на Q е P .

Трябва да отбележим още, че педалната крива $\pi(P, Q)$ е елипса или хипербола съответно когато $\bar{k}(O)$ е елипса или хипербола (Гроздев & Ненков, 2014, 3). Освен това, ако $\bar{k}(O)$ и $\pi(P, Q)$ са хиперболи, те имат успоредни асимптоти (Гроздев & Ненков, 2014, 3).

Ако точката P лежи върху $\bar{k}(O)$, както следва от (3), то е изпълнено равенството

$$(6) \quad (1-2x_0)x_0y_0z_0 + (1-2y_0)y_0z_0x_0 + (1-2z_0)z_0x_0y_0 = 0,$$

вследствие на което точките P_a, P_b и P_c лежат на една права s_P . Правата s_P наричаме *Симсънова права на точката P спрямо $\bar{k}(O)$* (Ненков, 2007). В този случай правите s_a, s_b и s_c са колинеарни с вектора $\bar{Q}((1-2x_0)x_0y_0z_0, (1-2y_0)y_0z_0x_0, (1-2z_0)z_0x_0y_0)$, който определя безкрайната точка Q . Точката Q ще наричаме *спрегната на P спрямо $\bar{k}(O)$* . Обратно, безкрайната точка Q има за спрегната спрямо $\bar{k}(O)$ точката P от $\bar{k}(O)$ (Гроздев & Ненков, 2012).

3.2. Описана крива, центърът на която лежи върху страна на триъгълника. Ако $O(x_0, y_0, z_0) \equiv M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ и $C_1(l, m, 0)$ ($l+m=1$) е точка от правата AB , уравнението на описаната крива $\bar{k}(O) \equiv \bar{k}(M_c, C_1)$ може да се представи във вида:

$$(7) \quad \bar{k}(M_c, C_1): lyz + mzx + xy = 0, (l+m=1).$$

Нека $P(x_P, y_P, z_P)$ ($x_P + y_P + z_P = 1$) е точка от равнината на $\triangle ABC$, а правите p_a, p_b и p_c минават през P и са съответно успоредни на M_cM_a, M_cM_b и CC_1 , като $P_a = p_a \cap BC$, $P_b = p_b \cap CA$ и $P_c = p_c \cap AB$. С s_a, s_b и s_c означаваме правите, които минават съответно през средите на отсечките P_bP_c, P_cP_a и P_aP_b , така че да са спрегнати съответно с правите P_bP_c, P_cP_a и P_aP_b спрямо $\bar{k}(M_c, C_1)$.

Ако точката P не лежи върху $\bar{k}(M_c, C_1)$, както следва от (7), изразът

$$(8) \quad \vartheta(P, C_1) = ly_Pz_P + mzy_Px_P + x_Py_P$$

е различен от нула, вследствие на което точките P_a, P_b и P_c образуват триъгълник. Тогава правите s_a, s_b и s_c се пресичат в една точка

$$W\left(\frac{\vartheta(P, C_1)x_P + ly_Pz_P}{2\vartheta(P)}, \frac{\vartheta(P, C_1)y_P + mzy_Px_P}{2\vartheta(P)}, \frac{\vartheta(P, C_1)z_P + x_Py_P}{2\vartheta(P)}\right),$$

която е център на описано за $\triangle P_aP_bP_c$ конично сечение π_P . Това конично сечение π_P наричаме *педална крива на точката P спрямо описаната крива $\bar{k}(M_c, C_1)$* .

Нека педалната крива π_P пресича за втори път правите BC, CA и AB съответно в точки Q_a, Q_b и Q_c . Правите, минаващи през Q_a, Q_b и Q_c , които са съответно успо-

редни на OM_a , OM_b и CC_1 , се пресичат в една точка $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, чиито координати са следните:

$$(9) \quad x_Q = \frac{ly_P z_P}{\vartheta(P, C_1)}, \quad y_Q = \frac{mz_P x_P}{\vartheta(P, C_1)}, \quad z_Q = \frac{x_P y_P}{\vartheta(P, C_1)},$$

където $\vartheta(P, C_1)$ се изразява с равенството (8).

Както в предишния случай (когато O не е среда на страна на $\triangle ABC$) точката Q е симетрична на P спрямо центъра W , има педална крива $\pi_Q \equiv \pi_P \equiv \pi(P, Q)$ и се нарича *спрегната на P спрямо $\bar{k}(O)$* .

Трябва да отбележим още, че педалната крива $\pi(P, Q)$ е елипса или хипербола съответно когато $\bar{k}(M_c, C_1)$ е елипса или хипербола. Освен това, ако $\bar{k}(M_c, C_1)$ и $\pi(P, Q)$ са хиперболи, те имат успоредни асимптоти.

Ако точката P лежи върху $\bar{k}(O)$, както следва от (3), то е изпълнено равенството

$$(10) \quad ly_P z_P + mz_P x_P + x_P y_P = 0,$$

вследствие на което точките P_a , P_b и P_c лежат на една права s_P . Правата s_P наричаме *Симсънова права на точката P спрямо $\bar{k}(M_c, C_1)$* . В този случай правите s_a , s_b и s_c са колинеарни с вектора $\bar{Q}(ly_P z_P, mz_P x_P, x_P y_P)$, който определя безкрайната точка Q . Точката Q наричаме *спрегната на P спрямо $\bar{k}(M_c, C_1)$* . Обратно, безкрайната точка Q има за спрегната спрямо $\bar{k}(M_c, C_1)$ точката P от $\bar{k}(M_c, C_1)$.

Трябва да се отбележи, че, когато точката P лежи върху страна $\triangle ABC$, нейната спрегната точка е върхът, лежащ срещу тази страна. Ако $P \in AB$ ($P \neq A, P \neq B$), нейната спрегната точка е върхът C , а педалната крива $\pi(P, C)$ е напълно определена от точките P , P_a , P_b , C и C_1 . Центърът на $\pi(P, C)$ е средата на отсечката PC .

4. Взаимно еднозначно съответствие между диаметрите на описаната крива и точките от спрегнатата ѝ Ойлерова крива. Според обобщената теорема на Грифитс, ако точката P се движи по диаметър d на описаната крива $\bar{k}(O)$, нейната педална крива минава през постоянна точка T от Ойлеровата крива $\Omega(O)$ (Гроздев & Ненков, 2015, 1). Доказателството, проведеното в (Гроздев & Ненков, 2015, 1), уточнява, че тази постоянна точка T е център на описана около $\triangle ABC$ крива, върху която се движи спрегнатата на P точка Q . Следователно на всеки диаметър d за $\bar{k}(O)$ съответства точка T от Ойлеровата крива $\Omega(O)$. Ще докажем, че е изпълнено и обратното – ако $T \in \Omega(O)$ е център на описана за $\triangle ABC$ крива k , спрегнатата на движеща се по k точка Q описва диаметър на $\bar{k}(O)$.

Първо ще отбележим, че, ако $\Omega(O)$ е хипербола (тогава и $\bar{k}(O)$ е хипербола),

безкрайните точки на $\Omega(O)$ са центрове на параболи, описани за ΔABC . Тези безкрайни точки, както е показано в (Гроздев & Ненков, 2015, 1), са точките, през които минават педалните криви на точките от асимптотите на $\bar{k}(O)$. Следователно на безкрайните точки на $\Omega(O)$ могат да се съпоставят асимптотите на $\bar{k}(O)$, т.е. между безкрайните точки на $\Omega(O)$ и асимптотите на $\bar{k}(O)$ съществува взаимно еднозначно съответствие.

Останалите случаи, в които точката $T(x_T, y_T, z_T)$ ($x_T + y_T + z_T = 1$) е крайна за $\Omega(O)$, ще разглеждаме в зависимост от положението на центъра O в равнината на ΔABC . Първо да отбележим, че ако точката $U(x_U, y_U, z_U)$ описва някаква крива в равнината на ΔABC , координатите ѝ могат да се изразят чрез координатите на нейната спрегната точка $V(x, y, z)$ по формулите (5) или (9). Така след заместване на координатите x_U , y_U и z_U в уравнението на описваната от U крива се получава уравнението, което удовлетворяват координатите x, y и z на спрегнатата точка V .

4.1. Описана крива, центърът на която не лежи върху страна на триъгълника. Нека $T(x_T, y_T, z_T)$ не съвпада с никоя от точките M_a, M_b и M_c . Тогава от (3) следва, че точките (X, Y, Z) от описаната за ΔABC крива $\bar{k}(T)$ с център T удовлетворяват уравнението:

$$(11) \quad (1-2x_T)x_TYZ + (1-2y_T)y_TZX + (1-2z_T)z_TXY = 0.$$

След заместване на координатите на точката U от (5) в (11) получаваме, че координатите на спрегнатата точка V удовлетворяват уравнението

$$(1-2y_0)(1-2z_0)(1-2x_T)x_Ty_0z_0x + (1-2z_0)(1-2x_0)(1-2y_T)y_Tz_0x_0y + \\ + (1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_T)z_Tx_0y_0z = 0.$$

Последното уравнение показва, че точката V описва права. След заместване на координатите на центъра O в лявата част на това уравнение получаваме

$$x_0y_0z_0 \left[(1-2y_0)(1-2z_0)(1-2x_T)x_T + (1-2z_0)(1-2x_0)(1-2y_T)y_T + \right. \\ \left. + (1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_T)z_T \right].$$

Тъй като $T \in \Omega(O)$, от (1) следва, че изразът в скобите е равен на нула. Следователно правата, която описва точката V , е диаметър на $\bar{k}(O)$.

Нека сега $T \equiv M_c$. От (7) намираме, че уравнението на описаната за ΔABC крива, минаваща през ортоида H , е следното:

$$(1-2x_0)x_0YZ - (1-2y_0)y_0ZX + (1-2z_0)(y_0-x_0)XY = 0.$$

След заместване на координатите на точката U от (5) в това уравнение получаваме, че координатите на спрегнатата точка V удовлетворяват уравнението $z_0x - z_0y + (y_0 - x_0)z = 0$. Очевидно е, че координатите на O удовлетворяват последното уравнение. Следователно и в този случай правата, която описва точката V , е диаметър на $\bar{k}(O)$. Случаите $T \equiv M_a$ и $T \equiv M_b$ са аналогични.

4.2. Описана крива, центърът на която лежи върху страна на триъгълника. Нека $O(x_0, y_0, z_0) \equiv M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ и $C_1(l, m, 0)$ ($l + m = 1$). Първо ще разгледаме случая, когато $T(x_T, y_T, z_T)$ не съвпада с никоя от точките M_a , M_b и M_c . Тогава от (3) следва, че точките (X, Y, Z) от описаната за DABC крива $k(T)$ с център T удовлетворяват уравнението (11). След заместване на координатите на точката U от (9) в (11) получаваме, че координатите на спрегнатата точка V удовлетворяват уравнението $(1 - 2x_T)x_Tmx + (1 - 2y_T)y_Tly + (1 - 2z_T)z_Tlmz = 0$. Последното уравнение показва, че точката V описва права. След заместване на координатите на центъра O в лявата част на това уравнение получаваме $\frac{1}{2}[m(1 - 2x_T)x_T + l(1 - 2y_T)y_T]$. Тъй като $T \in \Omega(O)$, от (2) следва, че изразът в скобите е равен на нула. Следователно правата, която описва точката V , е диаметър на $\bar{k}(O) \equiv \bar{k}(M_c, C_1)$.

Нека сега $T \equiv M_c$. Чрез (7) и (9) търсим подходяща крива, описана за DABC, така че спрегнатата точка V да описва права през M_c . Желаната крива, която трябва да описва точката U , има следното уравнение $lYZ - mZX + (l - m)XY = 0$. Съответният диаметър, който описва спрегнатата точка V , има следното уравнение $x - y + (l - m)z = 0$. По този начин на точката M_c съпоставяме диаметър на $\bar{k}(M_c, C_1)$.

Остава да разгледаме случаите, когато $T \equiv M_a$ и $T \equiv M_b$. В съответните случаи получаваме, че ако точката U описва кривите $lYZ - mZX + XY = 0$ и $-lYZ + mZX + XY = 0$, спрегнатата точка V описва съответно диаметрите $x - y + z = 0$ и $-x + y + z = 0$.

Получените резултати ще обобщим в следната

Теорема 1. *Между диаметрите на описаната крива $\bar{k}(O)$ и точките на асоциираната ѝ Ойлерова крива съществува взаимно еднозначно съответствие.*

Трябва да отбележим, че в (Гроздев & Ненков, 2014, 4) е доказано подобно твърдение, но то се отнася само за диаметри, които пресичат описаната крива $\bar{k}(O)$.

5. Обобщена теорема на Фонтене. Сега сме готови да формулираме и докажем едно обобщение теоремата на Фонтене.

Теорема 2. *Педалната крива на дадена точка P спрямо описаната за $\triangle ABC$ крива $\bar{k}(O)$ се допира до асоциираната ѝ Ойлерова крива $\Omega(O)$ тогава и само тогава, когато центърът на описаната крива $\bar{k}(O)$, точката P и точката Q , спрегната на P спрямо $\bar{k}(O)$, са колинеарни.*

Нека d е диаметър на описаната крива $\bar{k}(O)$, а P произволна точка от d . Спрегнатата на P точка Q лежи върху диаметър d' на $\bar{k}(O)$. Според теоремата на Грифитс педалните криви на точките от d минават през постоянна точка T от $\Omega(O)$, а педалните криви на точките от d' минават през постоянна точка T' от $\Omega(O)$. Следователно общата педална крива $\pi(P, Q)$ на спрегнатите точки P и Q минава през точките T и T' . От теорема 1 следва, че точките T и T' съвпадат тогава и само тогава, когато съвпадат d и d' . Затова педалната крива $\pi(P, Q)$ има само една обща точка с $\Omega(O)$ тогава и само тогава, когато $d' \equiv d$. Това означава, че $\pi(P, Q)$ се допира до $\Omega(O)$ точно когато точките O, P и Q лежат на една права.

6. Теорема на Фонтене за Симсънови прави. Интересно е да се определи дали съществува вариант на теоремата на Фонтене, когато точката $P(x_p, y_p, z_p)$ лежи върху описаната крива $\bar{k}(O)$. Тъй като в този случай педалната крива се заменя с права на Симсън, то очакваният вариант е свързан с определянето на случаите, в които Симсъновата права се допира до $\Omega(O)$. Можем да предположим, че аналогично на теоремата на Фонтене, желаното свойство се получава, когато точките O и P лежат на една права с безкрайната точка Q , която е спрегната на P . Ще разгледаме отделно двата случая, зависещи от положението на центъра O .

6.1. Описана крива, центърът на която не лежи върху страна на триъгълника. Първо да отбележим, че когато точката $P(x_p, y_p, z_p)$ лежи върху $\bar{k}(O)$, то е изпълнено равенството (6). Един от резултатите, получени в (Гроздев & Ненков, 2014, 4), е, че векторът $\vec{p}(x_p(z_p y_0 - y_p z_0), y_p(x_p z_0 - z_p x_0), z_p(y_p x_0 - x_p y_0))$ е колинеарен със Симсъновата права s_p на точката P . От друга страна, според резултат от (Гроздев & Ненков, 2015, 2), векторът $\vec{p}$ е спрегнат с $\vec{Q}((1-2x_0)x_0 y_p z_p, (1-2y_0)y_0 z_p x_p, (1-2z_0)z_0 x_p y_p)$. Според отбелязаното в 3.1 това е направлението, определящо безкрайната точка, спрегната с P спрямо $\bar{k}(O)$. Затова ще определим кога векторите $\vec{OP}(x_p - x_0, y_p - y_0, z_p - z_0)$ и $\vec{Q}$ са колинеарни. От координатите следва, че векторите $\vec{OP}$ и $\vec{Q}$ са колинеарни тогава и само тогава, когато са изпълнени равенствата:

$$\frac{x_p - x_0}{(1-2x_0)x_0 y_p z_p} = \frac{y_p - y_0}{(1-2y_0)y_0 z_p x_p} = \frac{z_p - z_0}{(1-2z_0)z_0 x_p y_p}.$$

Оттук намираме равенствата:

$$\begin{aligned}
 & -z_0[(1-2y_0)y_0y_Pz_P] + (y_0-x_0)[(1-2z_0)z_0x_Py_P] = \\
 & = -(1-2y_0)(1-x_0)y_0z_0x_P + (1-2x_0)(1-y_0)z_0x_0y_P - z_0(1-2x_0)x_0y_Pz_P, \\
 & (z_0-x_0)[(1-2y_0)y_0y_Pz_P] - y_0[(1-2z_0)z_0x_Py_P] = \\
 & = -(1-2z_0)(1-x_0)y_0z_0x_P + (1-2x_0)(1-z_0)x_0y_0z_P - y_0(1-2x_0)x_0y_Pz_P.
 \end{aligned}$$

Разглеждайки тези равенства като система уравнения спрямо изразите в квадратните скоби, определяме

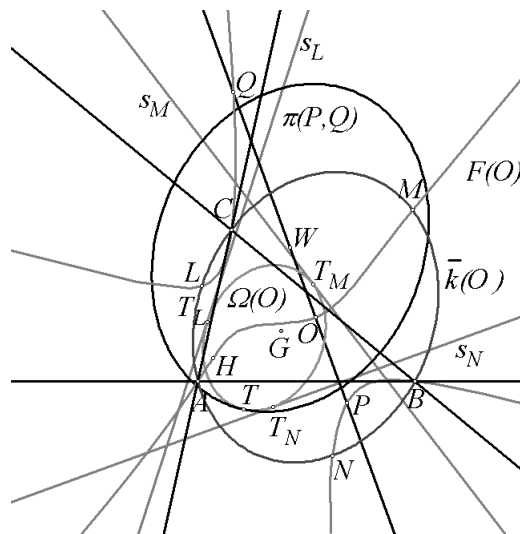
$$\begin{aligned}
 (1-2y_0)y_0z_Px_P &= (1-x_0)y_0z_0x_P - (1-y_0)y_0z_0y_P - (1-z_0)(y_0-x_0)y_0z_P + (1-2x_0)y_0y_Pz_P, \\
 (1-2z_0)z_0x_Py_P &= (1-x_0)y_0z_0x_P - (1-y_0)(z_0-x_0)z_0y_P - (1-z_0)y_0z_0z_P + (1-2x_0)z_0y_Pz_P.
 \end{aligned}$$

След почленно събиране на последните равенства, като използваме (6), получаваме равенство, което можем да запишем във вида

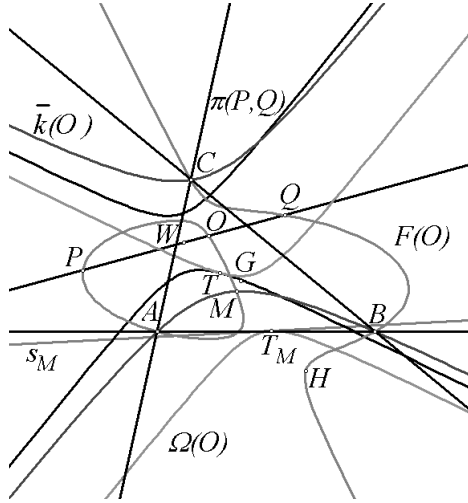
$$(12) \quad \frac{(1-2x_0)(y_Pz_0 + z_Py_0 - y_Pz_P)}{2y_0z_0} = \frac{1-2x_0+x_P}{2}.$$

По аналогичен начин се получават равенствата

$$(13) \quad \frac{(1-2y_0)(z_Px_0 + x_Pz_0 - z_Px_P)}{2z_0x_0} = \frac{1-2y_0+y_P}{2}, \quad \frac{(1-2z_0)(x_Py_0 + y_Px_0 - x_Py_P)}{2x_0y_0} = \frac{1-2z_0+z_P}{2}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Според резултатите, получени в (Гроздев & Ненков, 2014, 4), общите точки на Симсъновата права s_P с Ойлеровата крива $\Omega(O)$ са следните

$$T\left(\frac{(1-2x_0)(y_P z_0 + z_P y_0 - y_P z_P)}{2y_0 z_0}, \frac{(1-2y_0)(z_P x_0 + x_P z_0 - z_P x_P)}{2z_0 x_0}, \frac{(1-2z_0)(x_P y_0 + y_P x_0 - x_P y_P)}{2x_0 y_0}\right),$$

$$\bar{P}\left(\frac{1-2x_0+x_P}{2}, \frac{1-2y_0+y_P}{2}, \frac{1-2z_0+z_P}{2}\right).$$

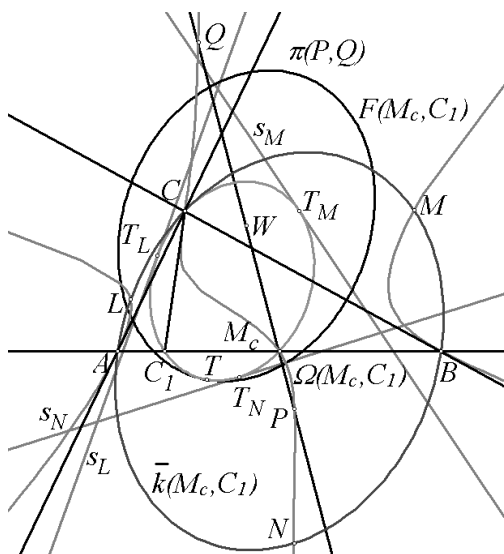
Следователно правата s_P е допирателна за $\Omega(O)$ тогава и само тогава, когато $\bar{P} \equiv T$. Това е изпълнено точно когато са изпълнени равенствата (12) и (13), т.е. когато s_P и OP са спрегнати спрямо $\bar{k}(O)$.

6.2. Описана крива, центърът на която лежи върху страна на триъгълника.

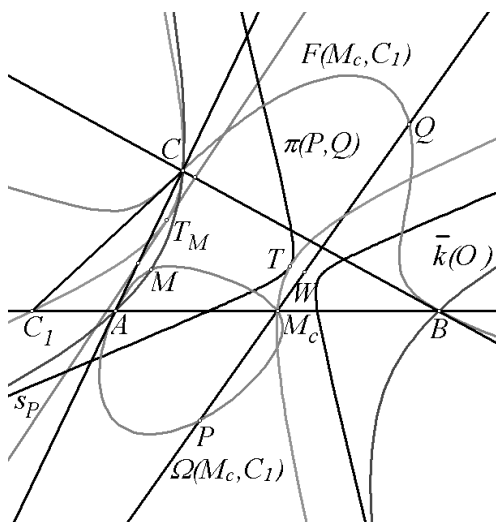
Нека $O(x_0, y_0, z_0) \equiv M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ и $C_1(l, m, 0)$ ($l+m=1$). В този случай векторът $\bar{p}(z_P x_P, -y_P z_P, z_P(y_P - x_P))$ е колинеарен със Симсъновата права s_P на точката P , а негов спрегнат вектор е $\bar{Q}(ly_P z_P, mz_P x_P, x_P y_P)$. Векторите $\overline{M_c P}\left(x_P - \frac{1}{2}, y_P - \frac{1}{2}, z_P\right)$ и $\bar{Q}$ са колинеарни тогава и само тогава, когато са изпълнени равенствата: $\frac{x_P - x_0}{ly_P z_P} = \frac{y_P - y_0}{mz_P x_P} = \frac{z_P - z_0}{x_P y_P}$. Оттук, както в предишния случай ($O \neq M_c$), намираме равенствата:

$$(14) \quad lz_p(1-2y_p) = \frac{x_p}{2}, \quad mz_p(1-2x_p) = \frac{y_p}{2}, \quad x_p + y_p - 2x_py_p = \frac{1+z_p}{2}.$$

От друга страна, общите точки на Симсъновата права s_P с Ойлеровата крива $\Omega(M_c, C_1)$ са следните $T(l_{z_P}(1-2y_P), mz_P(1-2x_P), x_P + y_P - 2x_P y_P)$ и $\bar{P}\left(\frac{x_P}{2}, \frac{y_P}{2}, \frac{1+z_P}{2}\right)$. Следователно правата s_P е допирателна за $\Omega(M_c, C_1)$ тогава и само тогава, когато са изпълнени равенствата (14), които означават, че правите s_P и $M_c P$ са спрегнати спрямо $\bar{k}(M_c, C_1)$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Получените резултати обобщаваме в следната

Теорема 3. Симсъновата права s_P на дадена точка P от описаната за ΔABC крива $\bar{k}(O)$ се допира до асоциираната ѝ Ойлеровата крива $\Omega(O)$ тогава и само тогава, когато s_P и OP са спрегнати прави спрямо $\bar{k}(O)$.

7. Крива на Фонтене. От теорема 2 следва, че спрегнатите точки P и Q имат педална крива, допираща се до Ойлеровата $\Omega(O)$, когато те лежат върху диаметър на $\bar{k}(O)$. От друга страна, теорема 2 не ни дава информация дали върху даден диаметър на $\bar{k}(O)$ съществува поне една двойка спрегнати точки. От резултатите, получени в (Гроздев & Ненков, 2015, 1), се вижда, че когато едната от спрегнати-

те точки P и Q описва диаметър d , другата описва крива от втора степен k_d (това беше използвано съществено при доказването на теорема 2). Ако точката P лежи едновременно на d и k_d , нейната спрегната също ще лежи едновременно на d и k_d . Следователно, ако върху d има спрегнати точки, те са общите точки на d и k_d . Така получаваме, че върху произволен диаметър на $\bar{k}(O)$ има най-много две спрегнати точки. Можем да предположим, че двойките спрегнати точки, лежащи на един диаметър, описват някаква крива $F(O)$ в равнината на ΔABC . От друга страна, върху тази крива трябва да лежат и точките на $\bar{k}(O)$, Симсъновите прави на които се допират до $\Omega(O)$. Затова е интересно да се установи какъв е броят на точките, чиито Симсънови прави са допирателни за $\Omega(O)$. Това ще ни даде възможност да разберем в колко точки се пресичат кривите $\bar{k}(O)$ и $F(O)$. Изясняването на тези въпроси ще извършим отново в зависимост от положението на центъра O в равнината на ΔABC .

7.1. Описана крива, центърът на която не лежи върху страна на триъгълника. Спрегнатите точки $P(x_p = x, y_p = y, z_p = z)$ и $Q(x_q, y_q, z_q)$ лежат на диаметър за

$$\bar{k}(O) \text{ точно когато е изпълнено равенството } \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \end{vmatrix} = 0 \text{ (Паскалев \& Чобанов,}$$

1985). След заместване на (5) в това равенство получаваме

$$(15) F(O): (1-2x_0)x_0(z_0y-y_0z)yz + (1-2y_0)y_0(x_0z-z_0x)zx + (1-2z_0)z_0(y_0x-x_0y)xy = 0.$$

Равенството (15) е уравнение на крива от трета степен, която ще наричаме *крива на Фонтене спрямо описаната крива $\bar{k}(O)$* .

Интересно е да се отбележат някои специални случаи за кривата на Фонтене. Ако $x_0=y_0$ (центърът O лежи върху медианата CM_c), кривата $F(O)$ се разпада на медианата $CM_c: x-y=0$ и кривата от втора степен $f_c: x_0z^2 + (2x_0-1)yz + (2x_0-1)zx + (4x_0-1)xy = 0$. Кривата f_c минава през точките $A, B, A_1 = AO \cap BC, B_1 = BO \cap CA$ и има за център медицентъра G . Ако $\bar{k}(O)$ е елипса, то f_c е хипербола, която пресича $\bar{k}(O)$ в точки U и V . Тези точки лежат върху правата, минаваща през средата на отсечката OC и е успоредна на AB . Симсъновите прави s_U и s_V съответно на точките U и V се пресичат върху правата CM_c и са допирателни за $\Omega(O)$. Когато $\bar{k}(O)$ е хипербола, тогава f_c е елипса, която няма други общи точки с $\bar{k}(O)$ освен върховете A и B . И в двата случая правата CM_c пресича $\bar{k}(O)$ в точка M , която е симетрична на C

Когато $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{3}$ ($O \equiv G$), кривата $F(O)$ се разпада на медианите $AM_a : y - z = 0$, $BM_b : z = x$, $CM_c : x - y = 0$, които пресичат $\bar{k}(O)$ съответно в точките M, L, N . Симсъновите прави s_M, s_L и s_N са съответно правите BC, CA и AB , които, от своя страна, са допирателни за $\Omega(G)$. Педалните криви на точките от медианите AM_a, BM_b и CM_c се допират до Ойлеровата крива $\Omega(G)$ съответно в средите M_a, M_b и M_c .

Точките $P(x_p, y_p, z_p)$, Симсъновите прави на които са допирателни за $\Omega(O)$, удовлетворяват равенствата (12) и (13). От тези равенства, след елиминиране на y_p и z_p , получаваме кубичното уравнение

$$(1-2y_0)(1-2z_0)x_p^3 - 3x_0(1-2y_0)(1-2z_0)x_p^2 - 3x_0^2(1-2x_0-3y_0z_0)x_p + x_0^2(1-2x_0)(1-y_0)(1-z_0) = 0.$$

След извършване на смяната $x_p = \bar{x} + x_0$ последното уравнение се превръща в следното $\bar{x}^3 + p\bar{x} + q = 0$, където $p = -\frac{3x_0^2y_0z_0}{(1-2y_0)(1-2z_0)}$ и $q = \frac{x_0^2y_0z_0(1-x_0)}{(1-2y_0)(1-2z_0)}$. Броят на решенията на кубичното уравнение зависи от знака на величината

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{x_0^4y_0^2z_0^2(1-2x_0)^2(y_0-z_0)^2}{(1-2y_0)^2(1-2z_0)^2} \cdot \left[\frac{1}{-(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)} \right].$$

Кубичното уравнение има един реален корен при $\Delta = -(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0) > 0$, а в противен случай ($\Delta < 0$) – три реални корена (някои от тях може да съвпадат). От друга страна, при $\Delta > 0$ описаната крива $\bar{k}(O)$ е хипербола и е елипса при $\Delta < 0$. Така получаваме следната

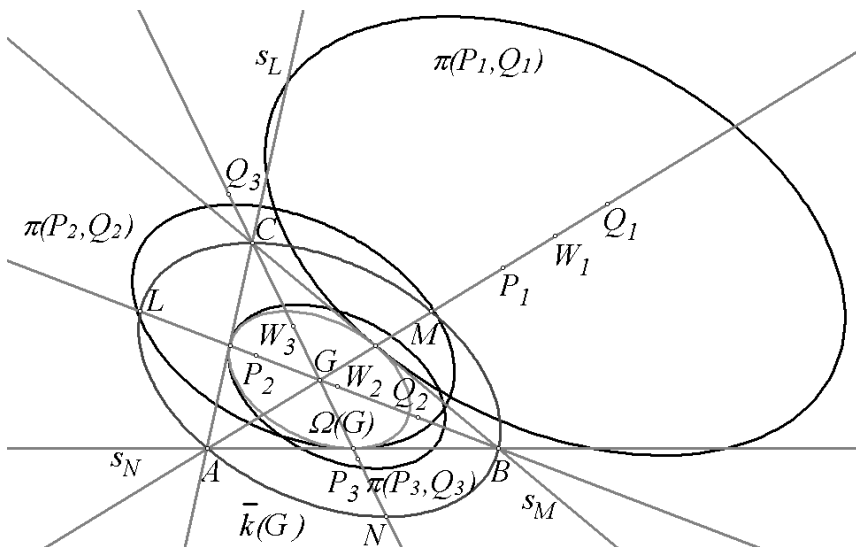
Теорема 4. Ако $\bar{k}(O)$ е хипербола, има точно една точка върху $\bar{k}(O)$, чиято Симсънова права е допирателна за $\Omega(O)$. Ако $\bar{k}(O)$ е елипса, има точно три точки върху $\bar{k}(O)$, чиято Симсънови прави са допирателни за $\Omega(O)$.

Трябва да се отбележи, че теорема 4 е доказана в (Гроздев & Ненков, 2014, 4), но по различен начин.

От теорема 4 и уравнението (15) на кривата $F(O)$ следва, че броят на общите точки на $F(O)$ и $\bar{k}(O)$ е четири или шест, съответно когато $k(O)$ е хипербола или елипса.

7.2. Описана крива, центърът на която лежи върху страна на триъгълника.

Нека $O(x_0, y_0, z_0) \equiv M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ и $C_1(l, m, 0)$ ($l+m=1$). В този случай кривата на Фонтене има следното уравнение

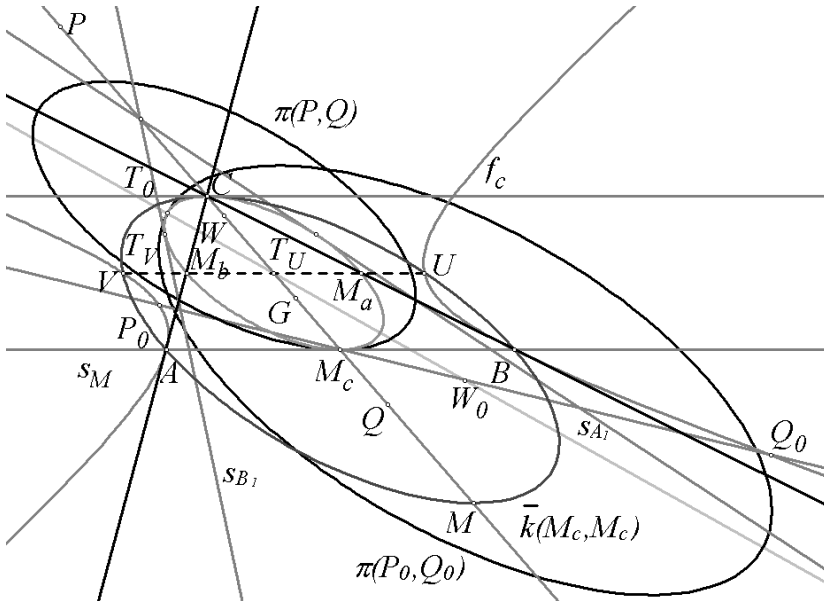


Фиг. 7

$$(16) \quad F(M_c, C_1): (mx - ly)z^2 + (x - y)xy = 0.$$

Кривата на Фонтене $F(M_c, C_1)$ се разпада на медианата $CM_c: x - y = 0$ и хиперболатата $f_c: z^2 + 2xy = 0$, когато $l = m = \frac{1}{2}$, т.е. когато $\bar{k}(M_c, M_c)$ е елипсата с център M_c , имаща за допирателна във върха C правата, успоредна на AB . Хиперболатата f_c се допира до правите BC и CA съответно в точките A и B . Освен това f_c пресича $\bar{k}(M_c, M_c)$ в точките U и V , които лежат на правата $M_a M_b$. Симсъновите прави s_U и s_V съответно на точките U и V се пресичат върху правата CM_c и са допирателни за Ойлеровата крива $\Omega(M_c, M_c)$. Правата CM_c пресича $\bar{k}(M_c, M_c)$ в точка M , която е симетрична на C спрямо M_c . Симсъновата права s_M на точката M е правата AB , която, от своя страна, е допирателна за $\Omega(M_c, M_c)$. От друга страна, педалната крива на всяка точка от медианата CM_c се допира до Ойлеровата крива в средата M_c .

Също както в случая $O \neq M_c$ се установява валидността на теорема 4. Оттук и от уравнението (16) следва и същият извод за броя на общите точки на $F(M_c, C_1)$ и $\bar{k}(M_c, C_1)$.



Фиг. 8

Най-общо трябва да се отбележи, че центърът O и ортоида H (които са спрегнати точки спрямо $\bar{k}(O)$ винаги принадлежат на кривата на Фонтене. Ойлеровата крива на тези точки е $\Omega(O)$ и може да считаме, че тя се допира до себе си във всяка своя точка. Освен това от получените резултати могат да се направят някои изводи за кривата на Фонтене в зависимост от описаната крива $\bar{k}(O)$. Броят на общите точки на $\bar{k}(O)$ и $F(O)$ (без върховете на $\triangle ABC$) показва, че кривата $F(O)$ се състои от три части, когато $\bar{k}(O)$ е елипса, и от две части (едната, от които е затворена), когато $\bar{k}(O)$ е хипербола. Това се дължи на факта, че кривата $F(O)$ освен точките от $\bar{k}(O)$ съдържа и техните спрегнати безкрайни точки. От получените резултати заключаваме още, че разпадащите се криви на Фонтене се получават, когато центърът O лежи върху медиана на $\triangle ABC$. От друга страна обаче, точките M_a , M_b и M_c (които също лежат върху медианите) са центрове на цели класове от описани за $\triangle ABC$ криви, които пораждат неразпадащи се криви на Фонтене.

8. Заключение. Теоремата на Фонтене е обобщение на теоремата на Фойербах: всяка вписана окръжност в $\triangle ABC$ се допира до неговата Ойлерова окръжност. От своя страна, теорема 2 е обобщение на теоремата на Фонтене. По същите причини, при които теоремата на Фонтене е обобщение на теоремата на Фойербах, теорема 2

е обобщение на една теорема, обобщаваща теоремата на Фойербах и доказана в (Ненков, 2008). В тази теорема са определени четири вписани за $\triangle ABC$, които са свързани по специален начин с описаната крива $\bar{k}(O)$ и обобщават вписаните окръжности в случая, когато $\bar{k}(O)$ е описаната за $\triangle ABC$ окръжност. Всъщност тази теорема ни дава основание такава комбинация от описана и вписани криви да наричаме Фойербахова конфигурация (Ненков, 2010). Всички описани за $\triangle ABC$ елипси пораждаат Фойербахови конфигурации, което означава, че те се включват като частни случаи на теорема 2. От друга страна, съществуват описани хиперболи, които не пораждаат Фойербахови конфигурации, но за тях е изпълнена теорема 2. Следователно теорема 2 има много по-общ характер от всички споменати теореми.

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С., В. Ненков. (2012). Две двойки точки, породени от асоциирани спрямо триъгълник централни конични сечения. *Математика и информатика*, 1, 60 – 83.
- Гроздев, С., В. Ненков. (2014, 1). Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования. *Сборник материалов международной научной конференции. Архангельск, САФУ*, 35 – 54.
- Гроздев, С., В. Ненков. (2014, 2). Педална крива на точка спрямо Фойербахова конфигурация, *Математика и информатика*, 6, 617 – 625.
- Гроздев, С., В. Ненков (2014,3). Хомотетични конични сечения в равнината на триъгълник, *Математика и информатика*, 2, 2014, 139 – 154.
- Гроздев, С., В. Ненков. (2014, 4). Няколко свойства на Симсъновите прави, свързани с Ойлерови криви. *Математика и математическо образование*, 43, 240 – 247.
- Гроздев, С., В. Ненков. (2015, 1). Пълно обобщение на теоремата на Грифитс с конични сечения. *Математика и информатика*, 5.
- Гроздев, С., В. Ненков. (2015, 2). Геометрична конструкция на крива на Чева. *Математика и информатика*, 1, 52 – 57.
- Ненков, В. (1996). Теоремата на Фонтене и някои нейни връзки с други теореми. *Математика и информатика*, 1, 72 – 76.
- Ненков, В. (1997). Комплексни числа и педални окръжности, *Математика и информатика*, 5-6, 37 – 41.
- Ненков, В. (2007). Две описани конични сечения и две породени от тях множества от прави. *Математика и математическо образование*, 36, 392 – 396.

- Ненков, В. (2008). Обобщение на теоремата на Фойербах, *Математика и информатика*, 2, 35 – 42.
- Ненков, В. (2010). Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация, *Математика и информатика*, 5, 42 – 61.
- Паскалев, Г., И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.
- Симеонов, А. (1996). Още едно доказателство на теоремата на Фонтене. *Математика и информатика*, 5, 74 – 75.

FONTENÉ THEOREM WITH RESPECT TO SURCUMSCRIBED CENTRAL CONICS

Abstract. A generalization of the remarkable Fontené theorem from the geometry of triangle is described in the present paper.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech
31, Sajko Saev Str.
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg