

ТЕОРЕМА НА ПОНСЕЛЕ ЗА ЧЕТИРИЪГЪЛНИЦИ

Сава Гроздев, Веселин Ненков

На нашия колега и приятел Светльо Дойчев

Резюме. Статията е посветена на етюди върху теоремата на Понселе за пораждане на четириъгълници, вписани в една крива и описани около друга.

Keywords: inscribed quadrilateral, circumscribed quadrilateral, conic.

Нека k_1 е едно описано за четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ конично сечение, а k_2 е негово вписано коничното сечение, като правите A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и A_4A_1 се допират до k_2 съответно в точките T_1 , T_2 , T_3 и T_4 . След като кривите k_1 и k_2 са вече установени, четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ може да се възстанови само по една от точките A_j и T_j ($j = 1, 2, 3, 4$) чрез построяване на допирателни към k_2 и намиране на пресечните им точки с k_1 . Затова, когато k_1 и k_2 са предварително известни, ще казваме, че всяка от тези точки *поражда четириъгълник* $A_1A_2A_3A_4$, *вписан в* k_1 *и описан около* k_2 . Относно пораждането на четириъгълници, вписани в една крива и описани около друга, е известна теоремата на Понселе, която можем да формулираме по следния начин:

Теорема 1. *Ако две конични сечения k_1 и k_2 са разположени в равнината по такъв начин, че съществува четириъгълник, който е вписан в k_1 и описан около k_2 , то всяка точка от тези конични сечения поражда четириъгълник, който е вписан в k_1 и описан около k_2 .*

Тази теорема е открита от френския математик Жан-Виктор Понселе (1788 – 1867) в по-обща формулировка, която се отнася до многоъгълници с произволен брой върхове. Доказателство на теоремата може да се намери в (Берже, 1984). Доказателство на теорема 1, когато k_1 и k_2 са окръжности и k_2 се намира вътре в k_1 , се съдържа в (Прасолов, 1986). Доказателство на по-общото твърдение, отнасящо се за многоъгълници, вписано-описани за окръжности k_1 и k_2 , като k_2 се намира в k_1 , може да се намери в (Шарыгин, 1986). Тук ще изложим едно доказателство на теорема 1, което ще проведем в два етапа.

1. Доказателство на теоремата на Понселе за квадрат. Ще докажем следния частен случай на теоремата на Понселе.

Теорема 2. Ако две конични сечения k_1 и k_2 са разположени в равнината по такъв начин, че съществува квадрат, който е вписан в k_1 и описан около k_2 , то всяка точка от тези конични сечения поражда успоредник, който е вписан в k_1 и описан около k_2 (Фиг. 1).

Нека $A_1A_2A_3A_4$ е квадрат с център O . Избираме Декартова координатна система Oxy с оси по диагоналите на $A_1A_2A_3A_4$ така, че $A_1(-1,0)$, $A_2(0,-1)$, $A_3(1,0)$ и $A_4(0,1)$ (Фиг. 1). Спрямо Oxy произволна крива от втора степен k има уравнение от вида

$$(1) \quad k: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

където a_{ij} ($1 \leq i, j \leq 3$) са реални коефициенти.

Нека $k \equiv k_1$ е произволна крива, която е описана около $A_1A_2A_3A_4$. Тъй като k_1 минава през A_1 и A_3 , от (1) се получават равенствата $a_{11} - 2a_{13} + a_{33} = 0$ и $a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 0$, откъдето следва, че $a_{13} = 0$ и $a_{11} = -a_{33}$. Аналогично от факта, че k_1 минава през A_2 и A_4 , се получава $a_{23} = 0$ и $a_{22} = -a_{33}$. Следователно уравнението на k_1 има вида $-a_{33}x^2 - a_{33}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0$. Тъй като k_1 не минава през O , то $a_{33} \neq 0$ и затова, след като разделим на $-a_{33}$ и положим $b = -\frac{a_{12}}{a_{33}}$, получаваме представяне на k_1 в следния вид:

$$(2) \quad k_1: x^2 + y^2 - 2bxy - 1 = 0.$$

Абсцисите на общите точки на произволна крива k с правите $A_3A_4: x + y = 1$, $A_1A_2: x + y = -1$, $A_4A_1: -x + y = 1$ и $A_2A_3: x - y = 1$ се определят съответно от уравненията:

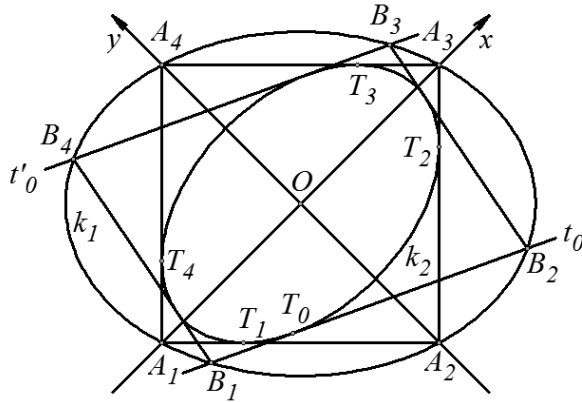
$$\begin{aligned} (a_{11} - 2a_{12} + a_{22})x^2 - 2(-a_{12} + a_{22} - a_{13} + a_{23})x + a_{22} + 2a_{23} + a_{33} &= 0, \\ (a_{11} - 2a_{12} + a_{22})x^2 - 2(a_{12} - a_{22} - a_{13} + a_{23})x + a_{22} - 2a_{23} + a_{33} &= 0, \\ (a_{11} + 2a_{12} + a_{22})x^2 - 2(-a_{12} - a_{22} - a_{13} - a_{23})x + a_{22} + 2a_{23} + a_{33} &= 0, \\ (a_{11} + 2a_{12} + a_{22})x^2 - 2(a_{12} + a_{22} - a_{13} - a_{23})x + a_{22} - 2a_{23} + a_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Сумата от дискриминантите на първите две уравнения е:

$$D_1 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - (a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 - 2a_{13}a_{23} + 2a_{12}a_{33}),$$

а на последните две е:

$$D_2 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - (a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 + 2a_{13}a_{23} - 2a_{12}a_{33}).$$



Фиг. 1

Нека $k \equiv k_2$ е произволна крива, която се допира до правите A_3A_4 , A_1A_2 , A_4A_1 и A_2A_3 съответно в точките T_3 , T_1 , T_4 и T_2 (Фиг. 1). Абсцисите на тези точки са двойните корени на съответните уравнения по-горе. Следователно абсцисите на точките T_3 , T_1 , T_4 и T_2 са равни съответно на $\frac{-a_{12} + a_{22} - a_{13} + a_{23}}{a_{11} - 2a_{12} + a_{22}}$, $\frac{a_{12} - a_{22} - a_{13} + a_{23}}{a_{11} - 2a_{12} + a_{22}}$, $\frac{-a_{12} - a_{22} - a_{13} - a_{23}}{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}$ и $\frac{a_{12} + a_{22} - a_{13} - a_{23}}{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}$. Тъй като двойните точки T_3 , T_1 и T_4 , T_2 са симетрични спрямо O , то сумите на абсцисите им са равни на нула, откъдето получаваме съответно равенствата $-a_{13} + a_{23} = 0$ и $a_{13} + a_{23} = 0$. Последните две равенства имат единствено решение $a_{13} = 0$ и $a_{23} = 0$. От друга страна дискриминантите на квадратните уравнения са равни на нула, затова $D_1 = D_2 = 0$. Като вземем предвид и последните две равенства, получаваме $a_{12}a_{33} = 0$. Но k_2 не минава през O , затова $a_{33} \neq 0$ и $a_{12} = 0$. Така получихме $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. От тези равенства и изразите за D_1 и D_2 получаваме още, че $a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} = 0$. Тъй като k_2 не е парабола, то $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$ и можем да положим $\frac{a_{33}}{a_{11}} = a \neq 0$, което според последното равенство води до $\frac{a_{33}}{a_{22}} = -a - 1 \neq 0$. Сега след заместване в (1) получаваме уравнението на k_2 във вида:

$$(3) \quad k_2 : (a+1)x^2 - ay^2 + a(a+1) = 0.$$

Нека $T_0(x_0, y_0)$ е произволна точка от k_2 . От (3) следва, че са изпълнени равенствата:

$$(4) \quad ay_0^2 = (a+1)(x_0^2 + a), \quad (a+1)x_0^2 = a(y_0^2 - a - 1).$$

Дохирателната t_0 на k_2 в точката T_0 има следното уравнение:

$$(5) \quad t_0 : (a+1)x_0x - ay_0y + a(a+1) = 0.$$

След елиминирание на y от (2) и (5), като използваме равенствата (4), получаваме квадратното уравнение

$$(6) \quad (x_0^2 + y_0^2 - 2bxy - 1)x^2 - 2[aby_0 - (a+1)x_0]x + a^2 - x^2 = 0.$$

Корените на (6) са абсцисите на пресечните точки $B_1(x_1, y_1)$ и $B_2(x_2, y_2)$ на t_0 с k_1 . Следователно от (6), според формулите на Виет, се получават равенствата:

$$(7) \quad x_1 + x_2 = \frac{2[aby_0 - (a+1)x_0]}{f}, \quad x_1x_2 = \frac{a^2 - x^2}{f},$$

където $f = x_0^2 + y_0^2 - 2bxy - 1$.

От (5) за ординатите на B_1 и B_2 получаваме равенствата:

$$(8) \quad y_1 + y_2 = \frac{(a+1)[x_0(x_1 + x_2) + 2a]}{ay_0},$$

$$y_1y_2 = \frac{(a+1)^2[x_0^2x_1x_2 + ax_0(x_1 + x_2) + a^2]}{a^2y_0^2}.$$

От (7) и (8), като използваме (4), получаваме равенствата:

$$(9) \quad y_1 + y_2 = \frac{2[ay_0 - (a+1)bx_0]}{f}, \quad y_1y_2 = \frac{(a+1)^2 - y_0^2}{f}.$$

Нека t'_0 е правата, симетрична на t_0 спрямо O . Следователно t'_0 е допирателна за k_2 и пресича k_1 в точки $B_3(-x_1, -y_1)$ и $B_4(-x_2, -y_2)$, които са симетрични съответно на B_1 и B_2 . Правата B_1B_4 е определена с уравнението

$$(10) \quad B_1 B_4 : (y_1 + y_2)x - (x_1 + x_2)y + \gamma = 0,$$

където $\gamma = x_2 y_1 - x_1 y_2$.

От (3) и (10) намираме, че абсцисите на общите точки на k_2 и $B_1 B_4$ удовлетворяват квадратното уравнение

$$\left[(a+1)(x_1 + x_2)^2 - a(y_1 + y_2)^2 \right] x^2 - 2a(y_1 - y_2)\gamma x + a \left[(a+1)(x_1 + x_2)^2 - \gamma^2 \right] = 0.$$

Тъй като, за да бъде вярна теорема 2, очакваме $B_1 B_4$ да е допирателна за k_2 , последното уравнение трябва да има един двоен корен. Това е изпълнено тогава и само тогава, когато дискриминантата му $a(a+1)(x_1 + x_2)^2 \left[\gamma^2 + a(y_1 + y_2)^2 - (a+1)(x_1 + x_2)^2 \right]$ е равна на нула. Както се вижда от последното равенство, това се случва точно когато е изпълнено равенството $\gamma^2 = (a+1)(x_1 + x_2)^2 - a(y_1 + y_2)^2$. След заместване в това равенство на съответните изрази от (7) и (9), като използваме (4), получаваме, че $B_1 B_4$ и k_2 се допират точно когато

$$(11) \quad \gamma^2 = \frac{4a(a+1) \left[a(a+1)(b^2 - 1) + f \right]}{f^2}.$$

От друга страна за γ^2 е изпълнено равенството

$$(12) \quad \begin{aligned} \gamma^2 = & (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \left[(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2) \right] - \\ & - \left[(x_1 + x_2)^2 y_1 y_2 + (y_1 + y_2)^2 x_1 x_2 \right]. \end{aligned}$$

Следователно, за да докажем теорема 2, трябва да докажем, че десните части на (11) и (12) съвпадат.

Тъй като B_1 и B_2 лежат върху правата t_0 , от уравнението ѝ (5) следва равенството $x_1 y_1 + x_2 y_2 = \frac{(a+1) \left[x_0 (x_1 + x_2)^2 + a(x_1 + x_2) - 2x_0 x_1 x_2 \right]}{a y_0}$. От това равенство, (8), (7) и (4) получаваме последователно равенствата

$$(13) \quad (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2) = \frac{a+1}{a y_0 f} \left[a(x_1 + x_2) + 2x_0 x_1 x_2 \right] = \frac{2 \left[a(a+1)b - x_0 y_0 \right]}{f}$$

След това от (7) и (9), с помощта на (4), получаваме равенството

$$(14) \quad (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = \frac{4a(a+1)[bf + (b^2 - 1)x_0y_0]}{f^2}.$$

Накрая, отново от (7), (9) и (4), получаваме равенството

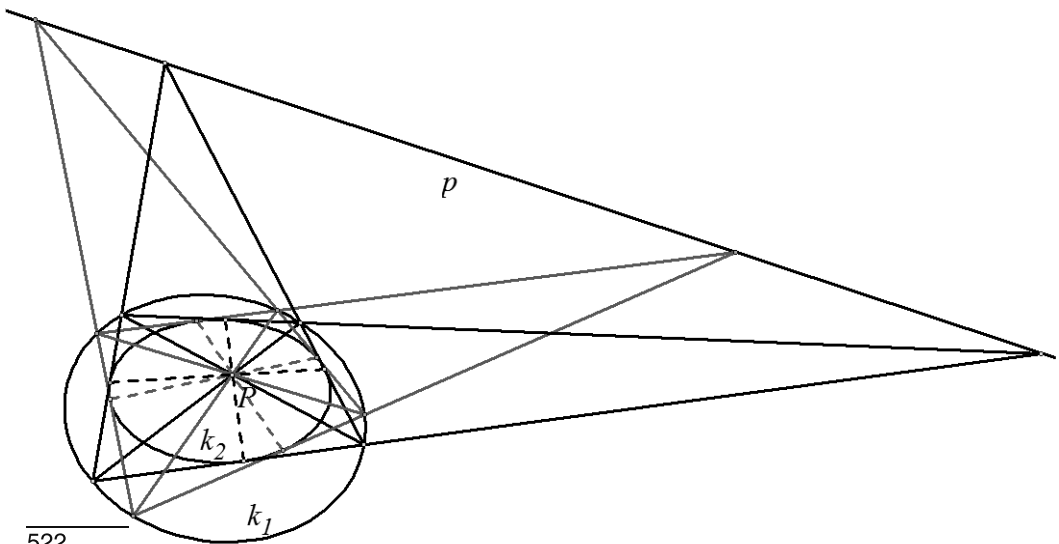
$$(15) \quad \begin{aligned} & (x_1 + x_2)^2 y_1 y_2 + (y_1 + y_2)^2 x_1 x_2 = \\ & = \frac{4a(a+1)}{f^3} \{ (b^2 - 1)[(a+1)(a+2)x_0^2 + a(a-1)y_0^2 - 2x_0^2 y_0^2 + a(a+1)] - \\ & - (x_0^2 + y_0^2 - 2a^2 - 2a - 1)f \}. \end{aligned}$$

Сега заместваме (13), (14) и (15) в (12) и получаваме равенството

$$(16) \quad \gamma^2 = \frac{4a(a+1)}{f^3} \{ f[a(a+1)(b^2 - 1) + f] - 2(b^2 - 1)[(a+1)x_0^2 - ay_0^2 + a(a+1)] \}$$

Остава да съобразим, че от $T_0(x_0, y_0) \in k_2$ следва $(a+1)x_0^2 - ay_0^2 + a(a+1) = 0$, за да заключим, че стойността на (12) съвпада с тази на (11). С това е доказано, че B_1B_4 е допирателна за k_2 . Оттук, поради симетрията спрямо O , следва, че B_2B_3 също е допирателна за k_2 .

Всички тези резултати водят до извода, че произволна точка T_0 от k_2 поражда успоредник, който е вписан в k_1 и описан около k_2 . От друга страна, допирателната през точката B_1 (от k_1) към k_2 през точката T_0 поражда същия успоредник. Следователно всяка точка от k_1 също поражда успоредник, който е вписан в k_1 и описан около k_2 . С това теорема 2 е доказана.



Успоредниците, породени от теорема 2, притежават следните интересни свойства:

От факта, че всички успоредници имат общ център на симетрия, следва:

1) диагоналите им имат една и съща пресечна точка;

2) допирните точки на двойките срещуположни страни на всеки успоредник с вписаната крива определят прави, минаващи през една точка.

От успоредността на срещуположните страни на успоредниците следва:

3) двойките срещуположни страни на всеки успоредник се “пресичат” върху една права – “безкрайната права”.

От факта, че вписана и описаната криви имат общ център, следва:

4) общата точка на диагоналите и “безкрайната права”, върху която се “пресичат” двойките срещуположни страни, са полюс и поляра едновременно спрямо описаната и вписаната криви.

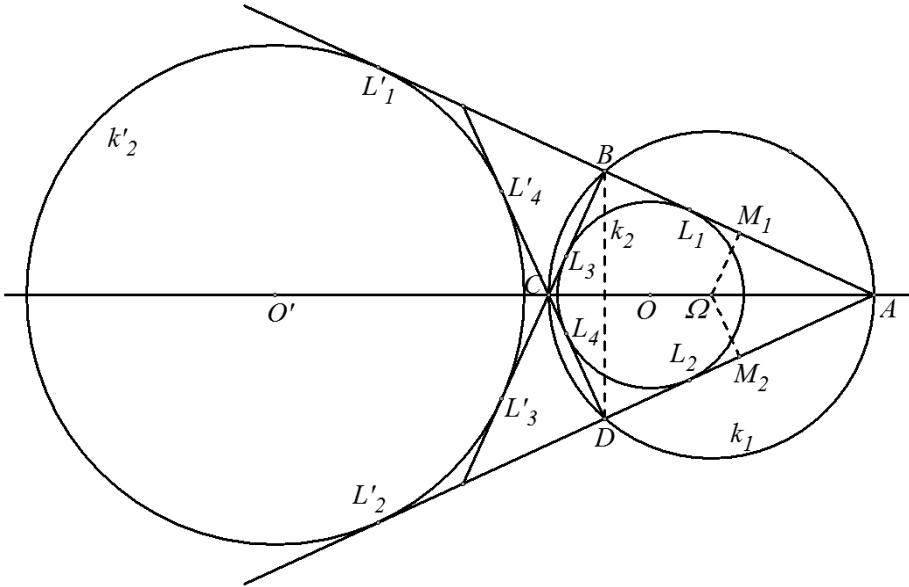
2. Доказателство на теорема 1. За да докажем теоремата на Понселе за произволен четириъгълник, ще направим преход от теорема 2 към теорема 1 с проективни средства.

Нека k_1 е произволна описана крива за четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$, а k_2 е негова вписана крива. Разглеждаме произволен квадрат $A'_1A'_2A'_3A'_4$ в равнината на $A_1A_2A_3A_4$. От една основна теорема на проективната геометрия (Матеев, 1977) следва, че съществува единствена проективност φ , която преобразува $A_1A_2A_3A_4$ в $A'_1A'_2A'_3A'_4$. Проективността φ (според друга теорема от проективната геометрия (Матеев, 1977)) преобразува k_1 в описана за квадрата $A'_1A'_2A'_3A'_4$ крива k'_1 , а k_2 – във вписана крива k'_2 на същия квадрат. Тъй като, според теорема 2, всички точки от двете криви k'_1 и k'_2 пораждат четириъгълници, вписани в едната и описани около другата крива, то φ^{-1} ще преобразува тези точки в точките на k_1 и k_2 със същите свойства.

С това теорема 1 е доказана.

Като използваме, че проективността φ^{-1} запазва всички проективни свойства на фигурите, от свойствата, отбелязани за успоредниците, получаваме следното:

Следствие 1. *Четириъгълниците, които са едновременно вписани в крива k_1 и описани около крива k_2 , притежават свойствата: 1) диагоналите на всички четириъгълници се пресичат в една точка P ; 2) допирните точки на двойките срещуположни страни на всеки четириъгълник с k_2 определят прави, минаващи през P ; 3) двойките срещуположни страни на всеки четириъгълник се пресичат върху една постоянна права p ; 4) точката P и правата p са полюс и поляра едновременно спрямо k_1 и k_2 (Фиг. 2).*



Фиг. 3

Когато k_1 и k_2 са окръжности, от теорема 1 получаваме:

Следствие 2. Ако две неконцентрични окръжности k_1 и k_2 са разположени в равнината по такъв начин, че съществува четириъгълник, който е вписан в k_1 и описан около k_2 , то съществува единствен делтоид, който е вписан в k_1 и описан около k_2 (Фиг. 3).

Съществуване. Означаваме с O и Ω центровете съответно на k_2 и k_1 (по условие те са различни). Нека правата $O\Omega$ пресича k_1 в точка A . Според теорема 1, точката A поражда вписано-описан четириъгълник $ABCD$ за k_1 и k_2 . Нека L_1 и L_2 са допирните точки на k_2 съответно с правите AB и AD , а M_1 и M_2 са средите на страните AB и AD (Фиг. 3). Тогава триъгълниците $\Omega M_1 A$ и $\Omega M_2 A$ са еднакви, затова $AB = AD$. Тъй като $AL_1 = AL_2$, оттук получаваме $BL_1 = DL_2$. Следователно $O\Omega$ е симетрала на диагонала BD . Ако L_3 и L_4 са допирните точки съответно на правите CB и CD с k_2 , т.е. $CL_3 = CL_4$, от предишното равенство следва, че $CB = CD$ (Фиг. 3). Оттук получаваме, че C лежи върху симетралата $O\Omega$ на BD . Така получихме делтоид $ABCD$, диагоналът AC на който е диаметър на описаната му окръжност k_1 . Ясно е, че точката C поражда същия делтоид $ABCD$.

Единственост. От съществуването на делтоид $ABCD$, вписан в k_1 и описан около k_2 , следва, че големият му диагонал съдържа центровете O и Ω . Следователно $ABCD$ е породен от пресечните точки на правата $O\Omega$ с k_1 . Но двете пресечни точки пораждат един делтоид, затова $ABCD$ е единствен.

ЛИТЕРАТУРА

Берже, М. (1984). *Геометрия. Том второй*. Москва: Мир

Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство.

Прасолов, В. (1986). *Задачи по планиметрия. Часть II*. Москва: Наука.

Шарыгин, И. (1986). *Задачи по геометрия. Планиметрия*. Москва: Наука.

✉ **Сава Гроздев**

професор, доктор по математика, доктор на педагогическите науки
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев”, бл. 8, 1113 София, България
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Веселин Ненков**

доктор по математика
Технически колеж Ловеч
ул. „Съйко Съев” № 31, Ловеч
E-mail: vnenkov@mail.bg

PONCELET THEOREM FOR QUADRILATERALS

Abstract. The paper is dedicated to some studies on Poncelet theorem for the generation of quadrilaterals that are inscribed in a conic and circumscribed to another conic.

✉ **Sava Grozdev**

Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8, 1113 Sofi a, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Veselin Nenkov**

Doctor in Mathematics
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Street, Lovech
E-mail: vnenkov@mail.bg