

СВЕЖДАНЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ И ТРАНСЦЕНДЕНТНИ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ДО МОДУЛНИ

Пенка Рангелова

Резюме. С разнообразни примери е показано свеждането на ирационални и трансцендентни уравнения и неравенства до модулни. Предложени са и задачи за самостоятелна работа.

Keywords: absolute value, equation, inequality, irrational, transcendental

Модулни уравнения от вида (1) $|f(x)| = g(x)$ или (1') $f(x) = |g(x)|$ са включени в програмата по математика за 9. клас. В Додунекова от 2001 (с. 77) в зависимост от сложността на функциите $f(x)$ и $g(x)$ решаването на уравненията (1) или (1') се свежда до обединение на решенията на системите

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}$$

или до обединение на решенията на системите

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) = -g(x) \\ g(x) < 0 \end{cases}.$$

В Паскалев & Паскалева от 2001 (с. 61) уравнението (1) е сведено до решаване на уравненията $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$ и проверка кои от намерените корени удовлетворяват неравенството $g(x) \geq 0$. В Петкова & Петков от 2001 (с. 56) се разглеждат модулни уравнения с два и повече модула и е разгледан методът на интервалите за тяхното решаване, включително и за уравнения от вида (1).

Предлагаме следното разглеждане за уравнения от вида (1):

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ [f(x) - g(x)] \cdot [f(x) + g(x)] = 0 \end{cases}.$$

Този подход ще следваме и при модулни неравенства. Когато уравнението съдържа няколко модула, например $|f(x)| \pm |g(x)| \pm |k(x)| = g(x)$, то дефиниционната област (ДО) се разделя на интервали чрез точките, които са корени на уравненията $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ и $k(x) = 0$ (Паскалев & Паскалева, 2001).

Модулното неравенство от вида (2) $|f(x)| > g(x)$ има за решения обединението от решения на $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ [f(x) - g(x)] \cdot [f(x) + g(x)] > 0 \end{cases}$ и $g(x) < 0$.

Модулното неравенство (3) $|f(x)| < g(x)$ има за решения решенията на системата $\begin{cases} g(x) > 0 \\ [f(x) - g(x)] \cdot [f(x) + g(x)] < 0 \end{cases}$.

Ще отбележим, че рационални и ирационални неравенства се разглеждат по програма в 10. клас. В учебниците на различните авторски колективи липсва методика за тяхното решаване. Първите ни разглеждания са свързани с решаване на определени видове уравнения, които се свеждат до модулни.

I група. Ирационални уравнения, свеждащи се до модулни уравнения

В редица задачи в подкоренната величина се съдържа точен квадрат на двучлен или тричлен относно неизвестното. Коренуването на този точен квадрат води до модулно уравнение.

Задача 1. Решете уравнението $\sqrt{4x^2 - 4\sqrt{2}x + 2} = x + 1$.

Решение: Преработваме даденото уравнение и получаваме $\sqrt{(2x - \sqrt{2})^2} = x + 1$
 $\Leftrightarrow |2x - \sqrt{2}| = x + 1$. Решенията на последното уравнение са решения на системата

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ (2x - \sqrt{2})^2 - (x + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (3x + 1 - \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}) = 0 \end{cases}.$$

Корените на уравнението от системата са $x_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{3}$ и $x_2 = \sqrt{2} + 1$. Всеки от тях изпълнява условието $x \geq -1$. Следователно x_1 и x_2 са решения на задачата.

Задача 2. Решете уравнението $\sqrt{2x^2 + 2\sqrt{6}x + 2\sqrt{10}x + 2\sqrt{15} + 8} = \sqrt{5}$.

Решение: Преработваме подкоренната величина и получаваме
 $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 2\sqrt{10}x + 2\sqrt{15} + 5 + 3 = (\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{6}x + 2\sqrt{10}x + 2\sqrt{15} =$
 $= (\sqrt{2}x + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2$. Следователно даденото уравнение приема вида

$|\sqrt{2x} + \sqrt{3} + \sqrt{5}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (\sqrt{2x} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2x} + \sqrt{3} + 2\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ и $x_2 = -\frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{10}}{2}$, които са решения на задачата.

Задача 3. Решете уравнението $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.

Решение: За разлика от предходните две задачи сега подкоренните величини не са точни квадрати на многочлени по отношение на x . Забелязваме обаче, че изразът $\sqrt{2x-5}$ се повтаря. Полагаме $\sqrt{2x-5} = u \geq 0$ и определяме $x = \frac{u^2+5}{2}$. Даденото уравнение записваме във вида

$$\sqrt{u^2+2u+1} + \sqrt{u^2+6u+9} = 14 \Leftrightarrow |u+1| + |u+3| = 14.$$

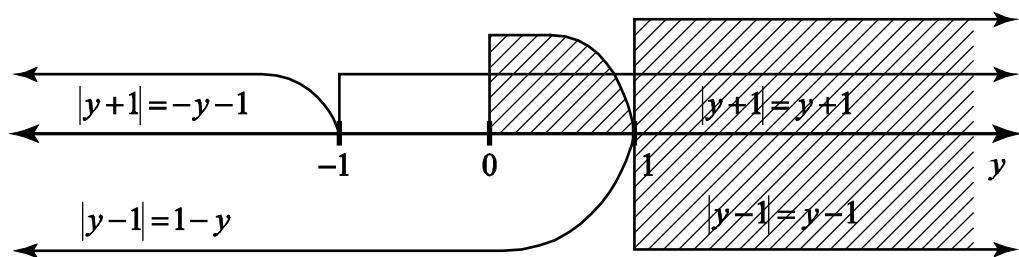
Понеже $u+1=0$ при $u=-1$, $u+3=0$ при $u=-3$ и $u \in [0; +\infty)$, то единственият интервал, в който разглеждаме уравнението, е $u \in [0; +\infty)$. В този интервал уравнението е $u+1+u+3=14 \Leftrightarrow 2u=10 \Leftrightarrow u=5$. Следователно $x = \frac{25+5}{2} = 15$.

Задача 4. Решете уравнението $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$.

(Задачата е от Първата международна олимпиада по математика, проведена в Румъния през 1959 г.).

Решение: Както в задача 3, полагаме $\sqrt{2x-1} = y \geq 0$ и намираме $x = \frac{y^2+1}{2}$.

Даденото уравнение приема вида $\sqrt{y^2+2y+1} + \sqrt{y^2-2y+1} = 2 \Leftrightarrow |y+1| + |y-1| = 2$.



Ясно е, че ДО за y се разделя на два интервала $-y \in [0; 1)$ и $y \in [1; +\infty)$. При $y \in [0; 1)$ уравнението е $y+1-y+1=2$. Следователно всяко $y \in [0; 1)$ е решение. При $y \in [1; +\infty)$ уравнението е $2y=2 \Rightarrow y=1$. Всички числа $y \in [0; 1)$ са решения на модулното уравнение. Тогава $0 \leq \sqrt{2x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x-1 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Следователно решенията на даденото уравнение са всички числа $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Задача 5. Решете уравнението $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

(Задачата е от областен кръг на олимпиада по математика, Бургас, 1997 г.)

Решение: Преработваме даденото уравнение и получаваме последователно

$$\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1. \text{ Разглеждаме случаите:}$$

I случай. Ако $\sqrt{x-1} \leq 2$, т.е. $0 \leq x \leq 5$, уравнението приема вида $2 - \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} + 3 = 1 \Rightarrow x = 5$.

II случай. Ако $\sqrt{x-1} \geq 3$, т.е. $x \geq 10$, уравнението може да се запише във вида $2\sqrt{x-1} - 5 = 1$, откъдето намираме $x = 10$.

III случай. Ако $2 < \sqrt{x-1} < 3$, т.е. $5 < x < 10$, уравнението е $\sqrt{x-1} - 2 + 3 - \sqrt{x-1} = 1$. В този случай всички числа $x \in (5; 10)$ са решения на уравнението.

Решенията на задачата са $x \in [5; 10]$.

II група. Трансцендентни уравнения, които се свеждат до модулни уравнения

Задача 6. Решете уравнението $\log_3(x+1)^2 = \frac{1}{2}\log_3(2x-3)^4$.

Решение: ДО: $x \neq -1$, $x \neq \frac{3}{2}$. Даденото уравнение записваме във вида $2\log_3|x+1| = 2\log_3|2x-3|$, откъдето следва, че $|x+1| = |2x-3|$. Решенията на последното уравнение са решения на $(x+1+2x-3)(x+1-2x+3) = 0$, откъдето получаваме $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 4$. Понеже и двете намерени числа са от ДО, те са решения на задачата.

Ще отбележим, че в много математически справочници се разглежда свойството $\log_a A^p = p \log_a A$ без ограничение за A . Напомняме: $\log_a A^p = p \log_a |A|$.

Задача 7. Решете уравнението $\log_2 \sqrt{(1-x)^2} = 3$.

Решение: ДО: $x \neq 1$. От определението за логаритъм следва $|1-x| = 2^3$, откъдето $x_1 = 9$, $x_2 = -7$. Понеже и двете числа са от ДО, то те са решения на задачата.

Задача 8. Решете уравнението $\log_{x-3} \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$.

Решение: ДО: $x \in (3; 4) \cup (4; +\infty)$. Даденото уравнение приема вида $\log_{x-3} |x-3| = 1$, откъдето $x-3 = |x-3|$. Последното заедно с ДО за x води до уравнението $x-3 = x-3$. Заклучаваме, че всички $x \in (3; 4) \cup (4; +\infty)$ са решения.

Задача 9. Решете уравнението $\log_5 (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) = 4 \log_5 (x+7)$.

Упътване. Понеже $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4$, то за $x \in (-7; 1) \cup (1; +\infty)$ уравнението приема вида $|x-1| = x+7$. Търсеното решение е $x = -3$.

Задача 10. Решете уравнението $\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^6 - 2x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$.

Решение: От даденото уравнение получаваме последователно $\sqrt{(x^3 - 1)^2} = 1 - x$
 $\Leftrightarrow |x^3 - 1| = 1 - x$. Решенията на последното уравнение са решения на системата

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ (x^3 + x - 2)(x^3 - x) = 0 \end{cases}$$
, откъдето намираме $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$.

III група. Ирационални неравенства, свеждащи се до модулни

Задача 11. Решете неравенството:

а) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 5$;

б) $\sqrt{1 - 6x + 9x^2} \geq 3$.

Упътване. Неравенството е еквивалентно на:

а) $|x-3| \leq 5 \Rightarrow x \in [-2; 8]$;

б) $|1-3x| \geq 3 \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Задача 12. Решете неравенството $2\sqrt{x^2 - 4x + 4} < x^2$.

Упътване. За $x \neq 0$ неравенството е еквивалентно на $(2x - 4 - x^2) \cdot (2x - 4 + x^2) < 0$

$$\Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right).$$

Задача 13. Решете неравенството $\sqrt{x+8(3-\sqrt{x+8})} < \frac{x+16}{2\sqrt{x+8}-10}$.

Решение: Полагаме $\sqrt{x+8}=y \geq 0$, определяме $x=y^2-8$ и записваме даденото неравенство във вида $|y-4| < \frac{y^2+8}{2y-10}$. Последното ще има решение при $\frac{y^2+8}{2y-10} > 0 \Rightarrow y > 5$. За тези стойности на y следва, че $|y-4|=y-4$ и неравенството приема вида $y^2-18y+32 < 0$. Решенията на последното неравенство са $y \in (5; 16)$, а $x \in (17; 248)$.

Задача 14. Решете неравенството $\frac{\sqrt{4+x^2+4x}-\sqrt{4-4x+x^2}}{\sqrt{x^2+4+4x}+\sqrt{4+x^2-4x}} < 1$.

Упътване. Неравенството приема вида $\frac{|2+x|-|2-x|}{|x+2|+|2-x|} < 1 \Leftrightarrow 2|2-x| > 0$. Последното неравенство е вярно за всяко $x \neq 2$.

IV група. Трансцендентни неравенства, които се свеждат до модулни неравенства

Задача 15. Решете неравенството:

а) $2\log_1(x+2) - \log_1(4x^2+12x+9) < 0$;

б) $\lg\left(x^2 + \frac{1}{4} + x\right) > 2\lg(x-3)$.

Упътване. а) За $x \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$ решете неравенството $|2x+3| < x+2$.

б) За $x > 3$ неравенството приема вида $\left|x + \frac{1}{2}\right| > x-3$ и решенията на дадената задача са $x \in (3; +\infty)$.

Задача 16. Решете неравенството:

а) $\sqrt{1-2^x+2^{2x-2}} > 2^{2x}-2^{x+2}+1$;

б) $0,6^{\left|\frac{x}{x-1}\right|} < 0,6^x$.

Решение: а) Преработваме неравенството и получаваме последователно $\frac{1}{2}\sqrt{(2^x-2)^2} > (2^x-2)^2 - 3 \Leftrightarrow \frac{|2^x-2|}{2} > (2^x-2)^2 - 3$. Полагаме $|2^x-2|=u \geq 0$ и получаваме $2u^2 - u - 6 < 0$, откъдето $u \in [0;2)$, а $x < 2$.

б) Трябва да решим неравенството $\left|\frac{x}{x-1}\right| > x$ с ДО $x \neq 1$. Неговите решения са решенията на
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - x^2 > 0 \end{cases} \cup x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3(2-x) > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1;2).$$

Решенията на дадената задача са $x \in (-\infty;0) \cup (0;1) \cup (1;2)$.

С предложените подходи се решават следните задачи:

Задача 17. Решете уравнението:

а) $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}} - \sqrt{x-\sqrt{14x-49}} = \sqrt{14}$;

б) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1$.

Отговори: а) $x \in \left[3\frac{1}{2}; 7\right]$; б) $x = 5$.

Задача 18. Решете неравенствата:

а) $x+1 > 3\sqrt{x^2-4x+4}$;

б) $\log_{x+\frac{5}{2}}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 2$.

Отговори: а) $x \in \left(\frac{5}{4}; \frac{7}{2}\right)$; б) $x \in \left(-\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{21}+1}{4}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{21}-1}{4}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{109}-3}{4}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Додунеков, С. и др. (2001). *Математика за профилирана подготовка 9. клас*. София: Регалия 6.
2. Паскалев, Г. & Паскалева Здр. (2001). *Математика за 9. клас второ равнище*. София: Архимед.
3. Петкова, С. & Петков П. (2001). *Математика 9. клас профилирана подготовка*. София: Просвета.

4. Сивашинский, И. (1968). *Задачи по математике для внеклассных занятий*. Москва: Просвещение.
5. Сканава, М. (1988). *Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗЫ*. Москва: Высшая школа.
6. Grozdev, S. *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE, 2007 (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

Пенка Рангелова

✉ доцент, доктор

Факултет по математика и информатика
Пловдивски университет „П. Хилендарски“

бул. „България“ № 236

4003 Пловдив, България

e-mail: rangelova_penka@abv.bg

REDUCTION OF IRRATIONAL AND TRANSCENDENTAL EQUATIONS AND INEQUALITIES TO ABSOLUTE VALUE ONES

Abstract. Reduction of irrational and transcendental equations and inequalities to absolute value ones is considered by various examples. Some tasks for individual work are proposed too.

Penka Rangelova

✉ Associated Professor, PhD

Faculty of Mathematics and Informatics
Plovdiv University „Paisii Hiledarski“

236, Bulgaria Blvd.

4003 Plovdiv, Bulgaria

e-mail: rangelova_penka@abv.bg