

СРАВНЯВАНЕ НА ИЗРАЗИ С КВАДРАТНИ КОРЕНИ

Гинка Бизова, Ваня Лалева

Резюме. В бележката се разглеждат приложения на свойствата и действията с квадратни корени за сравняване на ирационални изрази.

Keywords: ирационален израз, квадратен корен; училищна математика

Предложените задачи могат да се решават с ученици от 8. клас при изучаване на темите „Квадратен корен“ и „Квадратни уравнения“, както и със зрелостници и кандидат-студенти. Те се отнасят до сравняване и подреждане по големина на изрази с квадратни корени, което може да се осъществи чрез:

- прилагане на свойството монотонност на квадратен корен
- използване на приблизителните стойности на квадратни корени
- прилагане на свойствата на числовите неравенства
- определяне на знаците на сравняваните изразите
- логически разсъждения.

Задача 1. Кои от числата са сравнени вярно?

а) $\sqrt{0,(32)} < \sqrt{0,32(3)}$ б) $\sqrt{11} < 2\sqrt{3}$ в) $\frac{1}{3} > \sqrt{0,9}$ г) $-2\sqrt{3} > -3\sqrt{2}$

Задача 2. На мястото на празното квадратче поставете знака $>$, $<$ или $=$ така, че полученото твърдение да е вярно:

а) $3\sqrt{561} \square 5\sqrt{561}$ б) $\sqrt{15} + \sqrt{0,3} \square \sqrt{15} + \sqrt{0,(3)}$
в) $\sqrt{3,14} - \sqrt{5} \square \sqrt{\pi} - \sqrt{5}$ г) $\frac{10}{\sqrt{7}} \square \frac{10}{\sqrt{3}}$ д) $2\sqrt{5} - 1 \square 2\sqrt{3} - 1$

Задача 3. Кои от изразите не са сравнени вярно?

а) $\sqrt{3} < \sqrt{5} - 1$ б) $\sqrt{2} + 1 > \sqrt{5}$ в) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$
г) $\sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$ д) $\sqrt{99} - \sqrt{26} < \sqrt{226} - \sqrt{80}$

Задача 4. На мястото на празното квадратче поставете знака $<$, $>$ или $=$ така, че изразите да са сравнени вярно:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } (3 - \sqrt{5})^2 \quad \square \quad 15 - 6\sqrt{5} & \text{б) } 2 \quad \square \quad \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} + \sqrt{5} \\ \text{в) } \frac{\sqrt{12} - \sqrt{15}}{\sqrt{3}} \quad \square \quad 1 - \sqrt{5} & \text{г) } 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{7} \quad \square \quad 3 + \sqrt{20} + \sqrt{63} \end{array}$$

Задача 5. Без да пресмятате, сравнете изразите:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sqrt{\pi} + \sqrt{81,2} \quad \square \quad \sqrt{80} + \sqrt{3,1} & \text{б) } \frac{308}{\sqrt{19}} \quad \square \quad \frac{517}{\sqrt{5}} \quad \text{в) } \sqrt{10,1} - \sqrt{6,2} \quad \square \quad \sqrt{15} - \sqrt{2,6} \\ \text{г) } \sqrt{11} - 2\sqrt{3} \quad \square \quad 2\sqrt{2} + 3 & \text{д) } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{5}} \quad \square \quad \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{5}} \end{array}$$

Задача 6. Подредете числата по големина, като започнете от най-малкото:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 0,5; \sqrt{0,3}; 2\sqrt{\frac{1}{8}}; \frac{\sqrt{5}}{5} & \text{б) } \sqrt{5} - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{2}; \sqrt{3} - 1; \sqrt{2} + 1 \\ \text{в) } \sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2}; 3 - 2\sqrt{2}; 3 - \sqrt{6}; |\sqrt{5} - 3| \end{array}$$

$$\text{г) } \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \sqrt{2}; \sqrt{3} - \sqrt{8}; \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, 0 \leq a < b; \sqrt{2} + \sqrt{a}, a > 0$$

Задача 7. Кое от числата $(1 - \sqrt{3})^2$; $(1 - \sqrt{3})^3$; $\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ и $\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$ е най-голямото?

Задача 8. Определете вида на триъгълника според страните му, ако те имат дължини $a = 2 - \sqrt{3}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $c = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

Задача 9. Три отсечки имат дължини $a = \sqrt{5} - \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ и $c = 3\sqrt{2}$. Могат ли те да бъдат страни на триъгълник?

Задача 10. Даден е триъгълник с дължини на страните $a = 3$, $b = 2\sqrt{2}$ и $c = \sqrt{17}$. Коя страна лежи срещу най-малкия ъгъл?

Задача 11. Намерете корените на уравненията

$$x^2 - 2x - 1 = 0, \quad y^2 - (\sqrt{2} + 1)y + 2\sqrt{2} - 2 = 0, \quad \sqrt{2}z^2 - z - \sqrt{2} = 0$$

и ги подредете по големина, като започнете с най-малкия.

Отговори, упътвания, решения

Задача 1. Използвайте свойството монотонност на квадратен корен, т.е. ако $0 \leq a \leq b$, то $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. За да го приложите в подусловия б), в) и г), внесете положителен множител под квадратен корен.

Отговор: Вярно са сравнени числата в подточки б) и г).

Задача 2. Двойките изрази имат равни множители, събираеми, умалител или делимо. Сравнете само другите множители, събираеми, умаляеми или делители.

Отговор: а) $3\sqrt{561} < 5\sqrt{561}$ б) $\sqrt{15} + \sqrt{0, (3)} > \sqrt{15} + \sqrt{0,3}$

в) $\sqrt{3,14} - \sqrt{5} < \sqrt{\pi} - \sqrt{5}$ г) $\frac{10}{\sqrt{7}} > \frac{10}{\sqrt{3}}$ д) $2\sqrt{5} - 1 > 2\sqrt{3} - 1$

Задача 3. Използвайте приблизителните стойности на корените: $\sqrt{2} \approx 1,4$, $\sqrt{3} \approx 1,7$ и $\sqrt{5} \approx 2,2$.

Ако пресмятането с приблизителни стойности не дава категоричен отговор за сравняването на числата, използвайте еквивалентни преобразувания на неравенствата до момент, в който сравнението е възможно.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt{3} < \sqrt{5} - 1 &\Leftrightarrow \sqrt{3} + 1 < \sqrt{5} \Leftrightarrow (\sqrt{3} + 1)^2 < (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{3} < 5 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{3} < 1 \Leftrightarrow (2\sqrt{3})^2 < 1 \Leftrightarrow 12 < 1 \end{aligned}$$

Да не забравяме, че повдигането в квадрат на двете страни на неравенството е еквивалентно преобразуване само ако числата в двете му страни са неотрицателни.

Отговор: Не са сравнени вярно числата в подточки а) и в).

Задача 4. Упътване: а) Опростете левия израз.

б) Приложете свойството на квадратен корен $\sqrt{a^2} = |a|$.

в) Изнесете общ множител от числителя на левия израз.

г) Изнесете множители пред корените в десния израз и сравнете събираемите поотделно.

$$\begin{aligned} \text{а) } (3 - \sqrt{5})^2 &< 15 - 6\sqrt{5} & \text{б) } 2 &< \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} + \sqrt{5} \\ \text{в) } \frac{\sqrt{12} - \sqrt{15}}{\sqrt{3}} &> 1 - \sqrt{5} & \text{г) } 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{7} &< 3 + \sqrt{20} + \sqrt{63} \end{aligned}$$

Задача 5. Упътване: а) Събираемите в левия израз са по-големи от събираемите в десния.

б) В първото частно по-малко делимо се дели на по-голям делител.

в) Сравнете умаляемите. Сравнете умалителите.

г) Определете знаците на двата израза.

д) Сравнете събираемите с равни знаменатели.

Отговор: а) $\sqrt{\pi} + \sqrt{81,2} > \sqrt{80} + \sqrt{3,1}$ б) $\frac{308}{\sqrt{19}} < \frac{517}{\sqrt{5}}$

в) $\sqrt{10,1} - \sqrt{6,2} < \sqrt{15} - \sqrt{2,6}$ г) $\sqrt{11} - 2\sqrt{3} < 2\sqrt{2} + 3$

д) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{5}}.$

Задача 6. Упътване: а) Внесете всички числа под квадратен корен.

Отговор: $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 0,5; $\sqrt{0,(3)}$; $2\sqrt{\frac{1}{8}}.$

б) Използвайте приблизителните стойности на корените.

Отговор: $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{2}$; $\sqrt{3} - 1$; $\sqrt{2} + 1$

в) Опростете изразите. Заменете $\sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2} = |\sqrt{7} - 3| = 3 - \sqrt{7},$
 $3 - 2\sqrt{2} = 3 - \sqrt{8}$ и $|\sqrt{5} - 3| = 3 - \sqrt{5}.$

Отговор: $|\sqrt{5} - 3|$; $3 - \sqrt{6}$; $\sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2}$; $3 - 2\sqrt{2}.$

г) След рационализиране на знаменателите на първия израз и извършване на действията се получава $\sqrt{2}$. Опростете израза

$$\sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{2} + 2} = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1.$$

При дадените условия за a и b изразът $\frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ приема само отрицателни стойности. За всяко $a > 0$ последният израз приема стойности по-големи от $\sqrt{2}$.

Отговор: $\frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$; $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \sqrt{2}$; $\sqrt{2} + \sqrt{a}.$

Задача 7. Решение: Тъй като $1 - \sqrt{3} < 0$, то единственото положително число $(1 - \sqrt{3})^2$ е най-голямото.

Задача 8. Решение: Триъгълникът е равнобедрен, защото

$$c = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 - 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}, \quad a = 2 - \sqrt{3} \quad \text{и} \quad b = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Задача 9. Упътване: Докажете, че $c = 3\sqrt{2}$ е най-голямата страна. Сравнете дължината ѝ със сбора и разликата на другите две страни a и b .

Отговор: Да.

Задача 10.

Отговор: Страната срещу най-малкия ъгъл е $b = 2\sqrt{2}$.

Задача 11. Решение: Корените на уравнението $x^2 - 2x - 1 = 0$ са $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Уравнението $y^2 - (\sqrt{2} + 1)y + 2\sqrt{2} - 2 = 0$ има дискриминанта $D = 11 - 6\sqrt{2} = (3 - \sqrt{2})^2$ и корени $y_1 = 2$ и $y_2 = \sqrt{2} - 1$. Решенията на уравнението $\sqrt{2}z^2 - z - \sqrt{2} = 0$ са $z_1 = \sqrt{2}$ и $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Използвайте приблизителната стойност $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Отговор: Подреждането на корените е: $-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 - \sqrt{2}; \sqrt{2} - 1; \sqrt{2}; 2; 1 + \sqrt{2}$.

Задачи за самостоятелна работа

1. Кои от неравенствата са верни?

а) $\sqrt{17} - 3\sqrt{2} < 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$ б) $\sqrt{65} + \sqrt{15} < \sqrt{80} + \sqrt{3}$

в) $\sqrt{3,81} + \sqrt{5,61} > \sqrt{2,4} + \sqrt{4,54}$ г) $\frac{\sqrt{507}}{\sqrt{31}} > \frac{\sqrt{500}}{\sqrt{41}}$

2. Най-малкото от посочените числа е:

а) $\sqrt{3}$ б) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ г) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ (Банков, 2008) (зад.1, стр.41)

3. Най-голямото от посочените числа е:

а) $\frac{7}{12}$ б) $\sqrt{0,34}$ в) $\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$ г) $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$ (Матеева, 2008) (зад.1, стр.36)

4. Ако $a = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$, $c = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ и $d = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, то верните

неравенства са:

а) $b < c < a < d$ б) $a < b < c < d$ в) $c < b < d < a$ г) $d < a < c < b$

5. Определете вида на триъгълника според страните му, ако те имат дължини $a = \sqrt{3} + 1$, $b = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ и $c = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$.

6. Кой е най-малкият ъгъл на триъгълника с дължини на страните $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$ и $c = \sqrt{30}$?

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
Отговор	а); в); г)	б)	а)	а)	$a = b = c$	срещу a

ЛИТЕРАТУРА

1. Паскалева, З. и др. (2008). *Математика за 8. клас*. София: Архимед.
2. Рангелова, П. и др. (2009). *Сборник за 8. клас – тестове и контролни работи. Математика*. Пловдив: Коала прес.
3. Запрянов, З. (2008). *Сборник задачи и тестове за 8. клас. Математика*. София: Регалия 6.
4. Банков, К. и др. (2008). *Математика – тестове за подготовка за зрелостен изпит*. София: Анубис.
5. Матеева, С. и др. (2008). *20 примерни теста за зрелостен изпит – Математика*. София: Регалия 6.

COMPARISON OF EXPRESSIONS WITH SQUARE ROOTS

Abstract. The present note considers applications of the properties and the operations with square roots in comparison of irrational expressions.

✉ Ginka Bizova

Chief Assistant

Faculty of Mathematics

Plovdiv University „P. Hilendarski“

Plovdiv

Vania Laleva

Teacher in Mathematics t

National School of Commerce

Plovdiv