https://doi.org/10.53656/math2025-5-6-stb

*Science in Education*
*Научно-методически статии*

# СЕЛЕКЦИЯ НА ОТБОРА НА БЪЛГАРИЯ ЗА ДВАДЕСЕТ И ДЕВЕТАТА МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

**Мирослав Маринов, Ивайло Кортезов**
*Институт по математика и информатика,*
*Българска академия на науките*

**Резюме**. Статията дава поглед към селекцията и подготовката на националния отбор за Младежката балканиада по математика 2025, избраното в състезанието българско предложение и кратък отчет за представянето на отбора.

*Ключови думи*: математически състезания; Младежка балканиада по математика; латински квадрати; инверсии в пермутация

## 1. Въведение

Младежката балканска олимпиада по математика (МлБОМ) е сред най-стойностните състезания за ученици до 15,5 години. Стартирало през 1997 (Bankov 2001), то набира все по-голяма популярност не само в региона, а в световен мащаб – броят на страните участнички продължава да нараства и далеч надхвърля рамките на Балканския полуостров. По отношение българските състезатели по математика (а и тези от региона) то е венецът в кариерата им на тази възраст.

## 2. Селекция на отбора на България за МлБОМ

Разширеният национален отбор на България за МлБОМ през 2025 г. беше избран съгласно наредбата на МОН въз основа на резултатите от Есенния математически турнир (за 8 и 9 клас), Зимните математически състезания (за 8 и 9 клас), Пролетните математически състезания (за 7, 8 и 9 клас), Националния кръг на олимпиадата по математика (за 7 и 8 клас) и се състоеше от най-добрите (според сбора на точките) четирима от седми клас, 8 души от осми клас и двама от девети клас, както и всички със сборове, равни на сбора на последния допуснат от съответния клас. За определяне на шестимата, които да представляват страната на МлБОМ, с разширения отбор бяха проведени две контролни работи по правилата на МлБОМ. Тук предлагаме част от задачите в тези контролни работи и кратки коментари по тях.

**Задача 1.** Да се намерят всички тройки $(a, b, p)$ от естествени числа $a$, $b$ и просто число $p \geq 3$, такива че $2^a + p^{2b}$ е точна $(p-1)$-ва степен на естествено число.

*Отговор.* $(a, b, p) = (4, 1, 3)$

*Решение.* Записваме $2^a + p^{2b} = n^{p-1}$ като $2^a = \left(n^{\frac{p-1}{2}} - p^b\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}} + p^b\right)$. И двата множителя трябва да са степени на 2, оттук $n^{\frac{p-1}{2}} + p^b = 2^k$ и $n^{\frac{p-1}{2}} - p^b = 2^\ell$ за някакви цели $k > \ell \geq 0$. Изваждане дава $2p^b = 2^k - 2^\ell$. От четност имаме $\ell > 0$, а след разделяне на 2 и пак от четност отхвърляме $\ell \geq 2$. Следователно $\ell = 1$ и $n^{\frac{p-1}{2}} - p^b = 2$. В частност, $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2 \pmod{p}$, значи $n^{p-1} \equiv 4 \pmod{p}$. Но $n^{p-1}$ дава остатък 0 или 1 от малката теорема на Ферма, значи (предвид $p \neq 2$) непременно $p = 3$.

При $p = 3$ уравнението придобива вида $2^a + 3^{2b} = n^2$. Явно $n$ е нечетно, а по модул 3 получаваме, че $a$ е четно. При $a = 2k$ имаме $(n - 2^k)(n + 2^k) = 3^{2b}$ и двата множителя са взаимнопрости (разликата им е степен на 2, т.е. общ прост делител не може да е различен от 2, но пък самите те са нечетни). Така непременно $n - 2^k = 1$, $n + 2^k = 3^{2b}$, съответно $2^{k+1} = 3^{2b} - 1 = (3^b - 1)(3^b + 1)$. Обаче тук разликата на двата множителя е 2, съответно точно един от тях се дели на 4 и другият трябва да е равен на 2. Понеже $3^b + 1 > 2$, остава $3^b - 1 = 2$, т.е. $b = 1$, и в $2^{k+1} = 3^{2b} - 1 = 8$ следва $k = 2$, т.е. $a = 4$. Директно се проверява, че тройката $(4, 1, 3)$ наистина изпълнява даденото уравнение.

*Оценяване.* (10 точки) 6 т. за отхвърляне на $p \geq 5$, от които 1 т. за получаване, че $n^{\frac{p-1}{2}} \pm p^b$ са степени на 2, 1 т. за получаване на $n^{\frac{p-1}{2}} - p^b = 2$, 1 т. за отбелязване на $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2 \pmod{p}$, 1 т. за достигане до $n^{p-1} \equiv 4 \pmod{p}$, 2 т. за завършване с теоремата на Ферма; 4 т. за решаване на $p = 3$, от които 1 т. за доказване, че $a$ е четно, 1 т. за разлагането $(n - 2^k)(n + 2^k) = 3^{2b}$, 1 т. за достигане до $2^{k+1} = (3^b - 1)(3^b + 1)$, 1 т. за довършване.

*Коментар.* Средният резултат по тази преднамерено лесна задача беше 7,13 т., като всички класирани в отбора имаха максимален резултат по нея, така че тя е осигурила добро разслояване като за лесна задача. Забелязва се също, че задачата бе цялостно лесна за осмокласниците, но трудна за седмокласниците – явно опитът с Диофантови уравнения, изискващи повече от кратки аргументи с числов модул или разлагане на израз, се придобива с много решаване в 8 клас.

**Задача 2.** Ненулевите реални числа $x$, $y$, $z$ са със сбор 0 и с произведение $-2$. Да се намерят най-малката и най-голямата възможни стойности (ако съществуват) на израза

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}$$

както и всички тройки $(x, y, z)$, при които те се достигат.

*Отговор.* Най-малката стойност е $\frac{15}{8}$ и се достига при пермутациите на $(1, 1, -2)$. Най-голяма стойност не съществува.

*Решение.* Понеже произведението на трите числа е отрицателно, точно 0 или 2 от тях са положителни; но поради сбора 0 трябва поне едно да е положително. Така без ограничение можем да считаме $x > 0$ и $y > 0$.

Нека $s = x+y$ и $p = xy$. От условието имаме $z = -s$, откъдето изразът $A$ е

$$A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{x^3y^3}-\frac{1}{(x+y)^3}=\frac{s^3-3sp}{p^3}-\frac{1}{s^3}$$

От условието имаме и $c=-\frac{2}{p}$, така че $p=\frac{2}{s}$, откъдето

$$A=\frac{s^3}{8}(s^3-6)-\frac{1}{s^3}=\frac{s^9-6s^6-8}{8s^3}.$$

*Минимум*: От неравенството $p \le \frac{s^2}{4}$ имаме $\frac{2}{s} \le \frac{s^2}{4}$, еквивалентно на $s^3 \ge 8$, т.е. на $s \ge 2$. Оттук $A \ge \frac{15}{8}$ е вярно поради еквивалентното $s^9 - 6s^6 - 15s^3 \ge 8$, което може да се запише като $s^3(s^3(s^3-6)-15) \ge 8$, а тук лявата страна расте с растенето на $s \ge 2$. Равенството е само при $s = 2$ и $p = \frac{2}{s} = 1$, т.е. $x = y = 1$, $z = -2$ (или пермутациите им, поради считането $x, y > 0$ в началото).

*Максимум*: За $s \ge 2$ имаме $A=\frac{s^9-6s^6-8}{8s^3}\ge\frac{2s^6-8}{8s^3}=\frac{s^3}{4}-\frac{1}{s^3}>\frac{s^3}{4}-1$ и значи при произволно голямо $s$ той може да приема произволно големи стойности. Такива $s$ са възможни, понеже при $s \ge 2$ имаме $p=\frac{2}{s}\le\frac{s^2}{4}$, съответно $x$ и $y$ съществуват (определят се като двата корена на уравнението $t^2 - st + p = 0$), оттук $z = -s = -(x + y)$ се определя от $x$ и $y$. Окончателно изразът няма максимум.

*Оценяване.* (10 точки) 1 т. за въвеждане на $s$ и $p$, 1 т. за подсигуряване на $s > 0$ и $p > 0$ (напр. чрез положителност на основни променливи), 2 т. за изразяване на дадения израз $A$ само чрез $s$ или само чрез $p$ (1 т. ако изразяването съдържа $s$ и $p$, но не и други променливи), 1 т. за верен отговор за минимума и стойностите на достигане, 1 т. за обосновка на $s \geq 2$ (или $p \leq 1$), 2 т. за доказване на $A \geq \dfrac{15}{8}$, когато $A$ е израз само на $s$ или само на $p$, 1 т. за обосновка, че $A$ като израз на $s$ или на $p$ приема произволно големи стойности и 1 т. за обосновка защо съответните големи $s$ (или малки $p$) наистина са възможни. При други решения: 7 т. за частта за минимум и 3 т. за частта за максимум.

*Коментар.* Средният резултат по също доста лесна задача беше 7,31 т., като всички класирани в отбора имаха максимален резултат по нея, така че тя е осигурила сравнително добро разслояване като за лесна задача. Голяма част от явилите се на контролните решиха задачата с горепоказания подход, като проверяващият дори отбеляза, че по начина на описване си личи, че съответният подход е добре практикуван – а именно, че при симетрично неравенство на две променливи често е ефективно да се работи със сбора $s$ и произведението $p$, като се използва $p \leq \frac{s^2}{4}$.

**Задача 3.** Всяко от целите числа $0, 1, 2, \ldots, N$ е оцветено в синьо или жълто така, че уравнението $2025 + a + b = c$ няма едноцветно решение. Намерете най-голямата възможна стойност на $N$.

*Отговор.* 8099.

*Решение. Пример.* Ако $N = 8099$ и сини са само числата от 2025 до 6074, то:

▷ ако някое от $a, b$ е по-голямо от 6074, то $c > 8099$;

▷ ако $0 \leq a, b \leq 2024$, то $2025 \leq 2025 + a + b \leq 6073$, т.е. $c$ е синьо;

▷ ако $a, b \geq 2025$, то $2025 + a + b \geq 6075$, така че ако $c$ има цвят, той е жълт.

*Оценка.* Да допуснем, че $N \geq 8100$. Без ограничение на общността 0 е синьо. Тогава $2025 = 2025+0+0$ е жълто, оттук $6075 = 2025+2025+2025$ е синьо и $8100 = 2025 + 0 + 6075$ е жълто. Сега ако 4050 е:

▷ синьо, то $a = 0$, $b = 4050$, $c = 6075$ е синьо решение: абсурд;

▷ жълто, то $a = 2025$, $b = 4050$, $c = 8100$ е жълто решение: абсурд.

*Оценяване.* (10 точки) 0 т. за верен отговор, 5 т. за пример при $N = 8099$: 2 т. за работещо оцветяване и 3 т. за проверката му, 5 т. за отхвърляне на $N \geq 8100$: 2 т. за разглеждане на подходяща съвкупност от числа (напр. $2025k$ за $k = 0, 1, 2, 3, 4$, но не заедно с други) и 3 т. за довършване.

*Коментар.* Средният резултат по тази задача беше 4,94 т., а средният резултат на класираните в отбора беше 8,00 – също добро разслояване. Може да се отбележи, че някои от неуспелите също имаха сили да решат задачата, но се бяха притеснили повече от полагащото се за такава задача. Друг потенциален проблем е сходството с формулировката на задача 4 от МБОМ 2021 (КОРТЕЗОВ, КАРЛОВ, МАРИНОВ 2021), чието решение е с подходящо групиране по двойки, докато тук подобен аргумент може лесно да доведе до безнадеждно заплитане. Все пак задачата се решава с най-естествената идея "да мислим алчно" – първо оцветяваме колкото се може повече от числата $0, 1, 2, \ldots$ в жълто, без да пропускаме някое, после оцветяваме колкото се може повече от следващите в синьо и после пак колкото се може повече в жълто – това води до примера за 8099. Предвид, че 8100 се дели на 2025, това е добра предпоставка, че кратните на 2025 ще са удобни и важни за доказване, че 8100 не работи, откъдето чрез разглеждане на цветовете на числата лесно се получава желания аргумент.

**Задача 4.** Даден е остроъгълен триъгълник $ABC$ с ортоцентър $H$ и описана окръжност $k$. Точката $D$ е петата на височината от $A$. Нека $X$ е произволна точка от дъгата $\widehat{BC}$ на $k$, несъдържаща $A$. Правата $XD$ пресича $k$ за втори път в точка $P$. Точката $Y$ от $k$ е такава, че $XY \perp BC$. Точката $Q$ върху правата $AY$ е такава, че $A$ е между $Q$ и $Y$ и $AQ = AY$. Да се докаже, че точките $A$, $P$, $Q$, $H$ лежат на една окръжност.

*Решение.* Нека $S$ е симетричната точка на $X$ относно $D$. Ще докажем всъщност, че точките $A, Q, P, S, H$ лежат на една окръжност.

Започваме с известния факт, че симетричната точка $T$ на $H$ относно $D$ лежи на $k$. Имаме $AY = XT$ и $AT \parallel XY$ (перпендикулярни са на $BC$), откъдето $AYXT$ е равнобедрен трапец. Нататък, от $HD = DT$ и $XD = DS$ следва, че $HSTX$ е успоредник. Достатъчно е да докажем за някои два от четириъгълниците $ASPH, AQSH$, $AQPS$, че са вписани.

- Явно $\angle HSP = \angle HSX = \angle PXT = \angle PAT = \angle PAH$ и $ASPH$ е вписан.

- От съображения за средна основа (може и чрез директно преследване на ъгли) получаваме $SQ \parallel AD \parallel XY$ (т.е. $AD$ е средна основа в трапеца $SQYX$), в частност $SQ \parallel AH$. Обаче $QA = AY = XT = SH$, откъдето $AQSH$ е равнобедрен трапец и значи вписан в окръжност.

- Вписаността на $AQPS$ е еквивалентна (от степен на точка) на $ZA \cdot ZQ = ZS \cdot ZP$, където $Z = AQ \cap PS$. Обаче от степен на точка за описаната около $ABC$ окръжност имаме $ZY \cdot ZA = ZX \cdot ZP$, значи свеждаме до $\dfrac{ZQ}{ZY} = \dfrac{ZS}{ZX}$. Това следва от теоремата на Талес за правите $QS \parallel XY$.

*Оценяване.* (10 точки) 1 т. за въвеждането на $T$ и отбелязване (може без доказателство), че лежи на $k$, 1 т. за $AYXT$ – равнобедрен трапец, 2 т. за въвеждането на $S$ и $HSTX$ – успоредник, 3 т. за доказване на един от трите вписани $ASPH, AQSH, AQPS$ и 3 т. за доказване на друг от тях. Частични точки при опити за доказателства на споменатите вписани четириъгълници не се присъждат.

*Коментар.* По тази трудна задача се получи само едно пълно решение и то от един от най-опитните състезатели (Радослав Стефанов), като познаването на свойствата на подобните триъгълници и степен на точка се оказа критично в случая. Средният резултат по тази задача беше 1,19 т., а средният резултат на класираните в отбора беше 2,17 т. Редно е да се отбележи, че в тази задача (както много геометрични), въпреки мястото в темата, имаше 2 много лесни точки, а именно първите две в оценяването, съответно не е добре, че средният резултат е съществено под 2 точки. Добрите ни състезатели са запознати със симетрии на ортоцентъра и съответните свойства, но въпреки това имаше някои, които си отбелязаха тези само на чернова и после съжаляваха. Участниците проучиха решенията и си направиха нужните изводи, поради което вярваме, че в подобни ситуации занапред ще се справят доста по-добре.

**Задача 8.** Ани и Боби играят. Първо Ани оцветява всяко цяло число от 0 до 95: половината в синьо, а останалите – в жълто. След това Боби свързва записаните числа в 48 двойки синьо-жълто. За всяка двойка свързани числа се дава една точка; тя е за Боби, ако при деление на 4 двете числа имат равно частно или равен остатък; в противен случай точката е за Ани. И двамата са достатъчно умни и мотивирани за печелене на точки. Какъв ще бъде окончателният резултат?

*Отговор.* 40 : 8 за Боби.

*Решение.* Навсякъде "‘частно"’ и "‘остатък"’ се отнасят за деление с 4.

Ако Ани оцвети в синьо кратните на 4 и числата, по-малки от 32 (общо $32+64 : 4 = 48$ числа), то числата $4k$, $k = 0, \dots, 7$ няма как да се свържат с число със същото частно или остатък (всички те са сини) и за техните двойки Ани ще спечели общо 8 точки.

Ще покажем как Боби може да си осигури 40 точки. Ще наричаме *серия* всяка четворка числа с еднакво частно.

Ако има серия с 2 сини и 2 жълти, то Боби ги свързва по двойки и печели точки за всички тези двойки.

Ако има серия с 3 сини и такава с 3 жълти, то (поне) 2 сини от първата серия имат същия остатък като 2 жълти от втората и Боби ги свързва в 2 двойки. Във всяка серия остават по две разноцветни числа, които Боби също свързва и така отново си осигурява точки за всички двойки от двете серии. Боби продължава по този начин, докато двойките от единия вид се изчерпят; ще считаме без ограничение на общността, че са се изчерпили тези с 3 сини.

Ако има чисто синя и чисто жълта серия, Боби свързва числата в тях, имащи еднакъв остатък, осигурявайки си точки за всички тези двойки. Боби продължава по този начин, докато двойките от единия вид се изчерпят; това ще са чисто жълтите, понеже в предходната стъпка са се изчерпили такива с повече сини. Нека в този момент са останали $b$ чисто сини серии и $y$ серии с точно 3 жълти ($y \leq 16$, понеже $3y \leq 48$). В последните жълтите са с 2 повече от сините, а общият брой сини и жълти е равен, така че $b = 2y$. Така Боби може да групира необработените серии по тройки, като всяка тройка съдържа една синя серия и две серии от другия вид. Броят на тези тройки е най-много 8, понеже $y \leq 16$. Да разгледаме една такава тройка.

Ако в последните две серии сините имат еднакъв остатък $r$, то Боби ги групира с числа от техните серии, имащи различни остатъци $s \neq t$; другите жълти числа с остатъци $s$ и $t$ в тези серии свързва с числата от синята серия, имащи техните остатъци; също за неизползвания до момента остатък групира числото от синята серия с жълтото в някоя от другите две. По този начин Боби си осигурява поне 5 точки, т.е. Ани може да спечели най-много една точка от тройката серии.

Ако в последните две серии сините имат различен остатък, то Боби групира трите жълти от едната серия с числа със същия остатък от синята серия, а последното от синята серия – с жълтото от неизползваната до момента серия, като освен това в нея свързва синьото с някое жълто. По този начин Боби си осигурява поне 5 точки, т.е. Ани може да спечели най-много една точка от тройката серии.

Действайки по този начин, Боби си осигурява всички точки с изключение на най-много 8.

*Оценяване.* (10 точки) 0 т. за верен отговор; 2 т. за гарантиране 8 точки за Ани; 8 т. за гарантиране 40 точки за Боби (при дадения подход: 1 т. за обработка на сериите с 2 сини; 1 т. за обработка на сериите с 1 и 3 сини без излишните; 1 т. за обработка на сериите с 0 и 4 сини без излишните; по 2 т. за обработка на излишните серии от всеки от двата споменати типа; 1 т. за завършване.)

*Коментар.* Средният резултат по тази задача беше 1,50 т., а средният резултат на класираните в отбора беше 2,67. Повечето състезатели се плъзнаха по повърхността на задачата, като или нямаха смислен напредък, или успяха да се справят с по-лесната част – гарантирането на точките за Ани и евентуално по-лесните за Боби. Верният отговор беше усетен от мнозина, само един участник успя да навлезе по-надълбоко, но отново не достигна до пълен успех. Отново можем да отбележим, че сред участниците имаше способни да се справят със задачата докрай, но като цяло притеснението им беше по-голямо, отколкото настойчивостта им. След запознаването с решението учениците се убедиха, че са имали сили да я преодолеят, което обикновено е индикатор, че в срещи с подобни задачи занапред участниците ще покажат по-голяма настойчивост.

В крайното класиране след проведените контролни работи се получи добро разслояване между първите шестима, които сформираха отбора на България (сборове в зоната 47 – 58 точки) и останалите (сборове в зоната 9 – 35 точки), като е знаменателен фактът, че разликата между последния класиран и първия некласиран (12 точки) беше по-голяма от разликата между всеки двама класирани. Това е изключително рядка ситуация – традиционно разликата е не само значително по-малка, а понякога си е направо 0, поради което се налагат допълнителни баражи за окончателното определяне на отбора (вж. напр. КОРТЕЗОВ, МАРИНОВ, 2022 и КОРТЕЗОВ, МАРИНОВ, 2023). Ръководството на отбора беше поверено на авторите на тази статия. Беше проведена еднодневна дистанционна подготовка (01.06.2025) и 12-дневна присъствена подготовка (11-22.06.2025) с общо 11 състезания (математически бой или контролна работа) и 66 учебни ча̀са лекции в ИМИ-БАН. Благодарим на МОН, СМБ, ИМИ-БАН, Фондация "Георги Чиликов" и СООПН за предоставеното финансиране и зали за провеждане на подготовката.

## 3. Българската задача в МлБОМ 2025 и породената от нея числова редица

Двадесет и деветата Младежка балканска олимпиада по математика (МлБОМ) за ученици до 15,5 години, организирана от Математическото общество на югоизточна Европа (MASSEE) се проведе в гр. Струга (Северна Македония) в периода 24-29 юни 2025. В олимпиадата взеха участие ученици от 24 отбора (рекорден брой в историята на МлБОМ) от 23 държави: Азербайджан (гост), Албания, Армения (гост), Босна

Херцеговина, България, Грузия (гост), Гърция, Казахстан (гост), Кипър, Киргизстан (гост), Малайзия (гост), Молдова, Румъния, Саудитска Арабия (гост), Северна Македония (2 отбора), Сърбия, Туркменистан (гост), Турция, Украйна (гост), Узбекистан (гост), Франция (гост), Хърватска (гост) и Черна Гора. Съгласно чл. 20 от правилата на МлБОМ[1] всяка страна-участник (включително страните-гости) има право да предложи до пет задачи на Комитета по подбор на задачите от страната-домакин, от които той подбира най-подходящите за съставяне на т.нар. шортлист, разпределен по теми, от който журито гласува четирите най-подходящи предложения. Нашата страна изпълни изцяло квотата по предложенията си, като от петте ни предложения три попаднаха в шортлиста, а една от тях беше избрана като една от четирите задачи в самата състезателна тема[2] – без съмнение най-трудната и интересна задача в нея. Както беше отбелязано сред мотивите за избор на журито, то трябва да се старае да избира ценностни задачи, които да бъдат запомнени дълго време, а това е напълно валидно тази задача, предложение на Борис Михов – един от най-силните ни състезатели по информатика в последно време (впрочем това е дало отпечатък и на характера на задачата). Предлагаме задачата и коментар към нея (останалите четири български предложения са все още засекретени и могат да се ползват за други състезания, поради което няма да говорим за тях тук).

**Задача 4 от МлБОМ 2025**. Нека $n$ е естествено число. Естествените числа от 1 до $n$ са записани в клетките на таблица $n \times n$ (по едно число във всяка клетка), така че всяко от тях се появява точно веднъж във всеки ред и точно веднъж във всяка колона. Нека $r_i$ е броя на двойките $(a, b)$ от числа в $i$-тия ред $(1 \leq i \leq n)$, такива че $a > b$, но $a$ е записано вляво от $b$ (не е задължително непосредствено до него). Нека $c_j$ е броя на двойките $(a, b)$ от числа в $j$-тата колона $(1 \leq j \leq n)$, такива че $a > b$, но $a$ е записано над $b$ (не е задължително непосредствено над него). Определете най-голямата възможна стойност на сумата

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n + c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

*Отговор.* $\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{3}$

*Решение.* Да предположим, че $x$ е на позиция $i$ в някой ред/колона. Тогава след него може да има най-много $\min(n-i, x-1)$ по-малки числа. Имайки предвид, че тази горна граница се разглежда поотделно за реда и за колоната на $x$, както и че $i$ е различно за различните срещания на $x$

е най-много

$$2\sum_{i=1}^{n}\min(n-i,x-1)=2\sum_{i=n-x+1}^{n}(n-i)+2\sum_{i=1}^{n-x}(x-1)=2\sum_{i=0}^{x-1}i+2(n-x)(x-1)$$
$$=x(x-1)+2(n-x)(x-1)=(2n-x)(x-1).$$

Сумирайки по $x=1,\dots,n$, получаваме следната горна граница за сумата:

$$\sum_{x=1}^{n}(2n-x)(x-1)=(2n+1)\sum_{x=1}^{n}x-\sum_{x=1}^{n}x^2-\sum_{x=1}^{n}2n$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2n^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}.$$

Равенство се постига например за таблицата, в която $s$-тият ред е

$$n+1-s,\ n-s,\ \dots,\ 1,\ n,\ n-1,\ \dots,\ n+2-s,$$

тъй като за всяко $x$ на позиция $i$ в ред или колона наистина има точно $\min(n-i,x-1)$ по-малки числа след него.

Породената от задачата редица, разбира се, присъства в Онлайн енциклопедията на целочислените редици[3], но описаното свойство липсваше там, т.е. по всичко личи, че имаме работа с досега неизвестен факт за тази редица. След приключване на състезанието това свойство беше предложено от един от авторите с препратка към МлБОМ 2025 и указване на автора Борис Михов. Предложението беше одобрено от редакторите на OEIS и включено в много кратък срок. Самата задача има всички необходими характеристики за избор за най-трудна в темата за МлБОМ: да бъде решена от известен брой ученици, но не и да бъде масово решена, като по този начин спомогне за ефективно определяне на завоювалите златни медали. От друга страна, нямаше опасност задачата да се окаже "‘нулева"’, понеже може да се започне с $n=3,4,\dots$ и при това примерите за тях са в общи линии естествени, което позволява на състезателите да изградят хипотеза за цялостната картина. Все получаването на завършено решение е сериозно предизвикателство, тъй като състезател може да тръгне по логични пътища, които, ако въобще водят до завършек, той определено не е лесен за забелязване (например при атака с индукция трябва да се намери смислен начин да се спази на индукционното предположение). Имаше и една допълнителна трудност: останалите три задачи допускаха възможността за сериозна загуба на време при неоптимален подход. В крайна сметка седем от участниците в МлБОМ успяха да спечелят пълен сбор (40т.) по четирите задачи, а трима други имаха минимални пропуски (краен резултат 38-39т.).

И шестимата наши участници завоюваха медали: един златен, четири сребърни и един бронзов. В отборното класиране сред 11-те официални участници България зае второ място (след Румъния), а сред всички 24 отбора – шесто.

## 4. Заключение

Подборът и подготовката на националния отбор за Младежката балканиада по математика 2025 показаха устойчивост на добрите практики, наложени през последните години, но и очертаха някои специфични особености на тазгодишния процес. Контролните работи дадоха надеждно разграничаване между най-силните състезатели и останалите, като за пръв път от доста време разликата между последния класиран и първия некласиран беше толкова отчетлива. Това позволи окончателният състав на отбора да бъде формиран без необходимост от допълнителни баражи – рядка, но показателна ситуация.

Селектираните шестима представители показаха високо ниво на математическа зрялост, което пролича както в добрите им резултати на подготвителните състезания, така и в умението да извличат правилните идеи дори при сложни задачи. Отчетливо се видя, че при по-лесните задачи целият разширен отбор е способен на пълни решения, докато трудните геометрични и комбинаторни задачи продължават да играят ролята на „естествен филтър“, отделящ най-опитните състезатели.

Българското предложение за задача бе високо оценено и избрано за официалната тема на МлБОМ 2025. Това е сериозно признание както за автора, така и за българската школа по състезателна математика като цяло. Освен че обогати състезателната програма, задачата генерира интересна числова редица, чието по-нататъшно изучаване би могло да се превърне в източник на нови проблеми и връзки с други области на дискретната математика.

В организационно отношение подготовката протече гладко и бе подпомогната от институционалната и финансова подкрепа на МОН, СМБ, ИМИ-БАН, Фондация „Георги Чиликов“ и СООПН. Тази подкрепа е ключова за запазването на традиционно силното присъствие на България в международните ученически олимпиади по математика.

В заключение можем да кажем, че процесът на селекция, подготовка и успешно участие на България в МлБОМ 2025 не само затвърждава позициите на страната ни в състезателната математика, но и създава стабилна основа за бъдещи постижения. Натрупаният опит и изводите от настоящата година ще бъдат ценен ориентир за следващите издания, а показаните резултати са уверение, че младите ни таланти продължават достойно да развиват и надграждат националните традиции.

Поредното издание на Младежката балканска олимпиада по математика затвърди реномето на това състезание като сериозен форум с все по-задълбочени задачи с интересни последствия в математическо отношение, който мотивира младите хора за избор на математиката като област на развитие. Неслучайно все повече държави в световен мащаб изявяват желание да участват в това състезание и всички индикации са, че тази тенденция ще продължи да се развива и занапред.

**NOTES**

1. MASSEE 2019. JBMO Regulations (last updated 30.3.2019 by the General Assembly of MASSEE) https://www.massee-org.eu/mathematical/publications/item/112-jbmo-regulations
2. JBMO 2025. 29th Junior Balkan Mathematical Olympiad https://jbmo2025.mk
3. SLOANE, N. J. A., 1991. On-line Encyclopaedia of Integer Sequences, https://oeis.org/A006331, introduced 11.07.1991 under the name *From the enumeration of corners.*

**ЛИТЕРАТУРА**

КОРТЕЗОВ И., КАРЛОВ Е., МАРИНОВ М., 2021. XXV Младежка балканиада по математика 2021. *Математика*, LX, 4, 2021, 3-7.

КОРТЕЗОВ И., М. МАРИНОВ, 2022. Селекция на отбора на България за XXVI МлБОМ. *Математика*, LXI, 4, 29-38.

КОРТЕЗОВ И., МАРИНОВ, М., 2023. Двадесет и седма младежка балканска олимпиада по математика, *Математика и Информатика*, 66, 5, Национално издателство "Аз-буки", ISSN:1310–2230, 645-652.

**REFERENCES**

BANKOV K., 2001. The Junior Balkan Mathematical Olympiad, Mathematics Competitions, *WFNMC Journal*, Vol. 14, No. 1, pp. 48-52.

KORTEZOV I., KARLOV E., MARINOV M., 2021. XXV Youth Balkan Mathematical Olympiad 2021. *Mathematics*, LX, 4, 3-7. (In Bulgarian)

KORTEZOV I., M. MARINOV, 2022. Selection of the Bulgarian team for

the XXVI Junior Balkan Mathematical Olympiad, *Mathematics*, LXI
4, 29-38. (In Bulgarian)
KORTEZOV I., MARINOV, M., 2023. Twenty-Sixth Junior Balkan Mathematical Olympiad, *Mathematics and Informatics*, 66, 5, National Publishing House "'Az-buki"', 2023, ISSN:1310–2230, 645-652. (In Bulgarian)

# SELECTION OF THE BULGARIAN TEAM FOR THE TWENTY-NINTH JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

**Abstract**. The article provides a look at the selection and preparation of the national team for the Junior Balkan Mathematical Olympiad 2025, the Bulgarian entry selected for the competition, and a brief report on the team's performance.

*Keywords*: mathematics competitions; Junior Balkan Math Olympiad, Latin squares, inversions in a permutation.

✉ **Мирослав Марино**
ORCID iD: 0009-0009-0536-7833
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, блок 8
1113 София, България
E-mail: `marinovbgr7@gmail.co`

✉ **Ивайло Кортезо**
ORCID iD: 0000-0002-9062-2609
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, блок 8
1113 София, България
E-mail: `kortezov@math.bas.b`