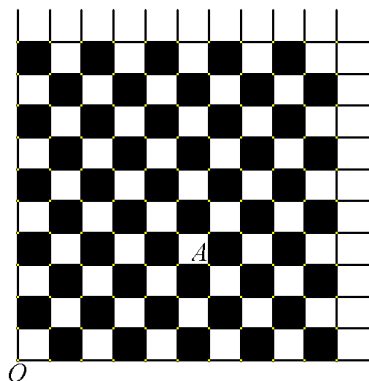


## РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2018

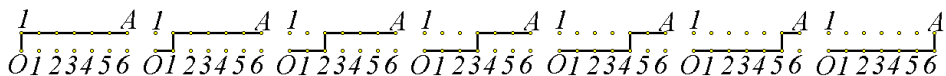
**Задача 1.** Точката  $O$  е левият долен връх на безкрайна шахматна дъска. Една муха тръгва от  $O$  и се движи само по страните на квадратчетата. Нека  $A$  е общ връх на някои квадратчета. Казваме, че мухата изминава пътя между  $O$  и  $A$ , ако се движи само надясно и нагоре. Ако точките  $O$  и  $A$  са противоположни върхове на правоъгълник  $m \times n$ , да се намери броят на пътищата, свързващи точките  $O$  и  $A$ , по които мухата може да мине, когато:

а)  $m = 1$  и  $n = 6$ ; б)  $m = 3$  и  $n = 6$ ; в)  $m$  и  $n$  са произволни естествени числа.



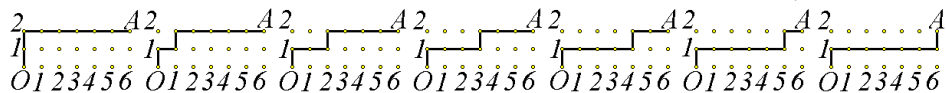
Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

**Решение:** означаваме върховете по хоризонталния и вертикалния ръб на дъската, следващи точката  $O$ , с естествените числа  $1, 2, 3, \dots$ . Първо да разгледаме  $1 \times 6$  правоъгълника  $OB_1A_1$ . На фиг. 1 са показани всичките възможни седем пътя, които може да измине мухата. Те се образуват след комбинирането на седемте точки  $O, 1, 2, 3, 4, 5$  и  $6$  с точките, намиращи се над тях. Следователно в този случай броят на всички пътища може да се запише по следния начин:  $C_7^1 = C_{6+1}^1$ . Оттук става ясно, че в правоъгълника  $1 \times n$  мухата може да измине  $C = n + 1$  пътя.



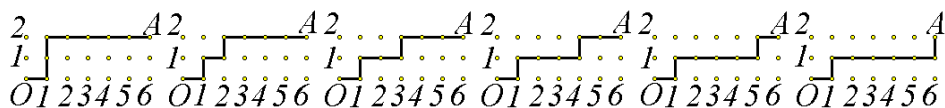
Фигура 1

Сега да разгледаме  $2 \times 6$  правоъгълника  $OB_2A_2$ . Ако мухата тръгне във вертикална посока и за момент спре в точката 1, по-нататък всички възможни пътища са както във вече разгледания случай. Следователно те са  $C_7^1$  (фиг. 2.0).



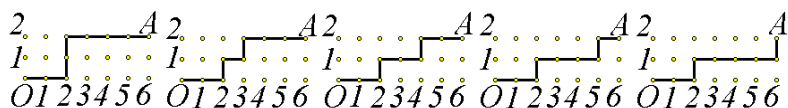
Фигура 2.0

След това нека мухата тръгва в хоризонтална посока и спре за момент в точката 1. Оттук нататък е приложима предишната ситуация, но за 6 точки. Това означава, че в този случай пътищата са  $C_6^1$  (фиг. 2.1).

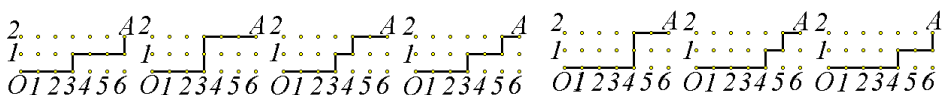


Фигура 2.1

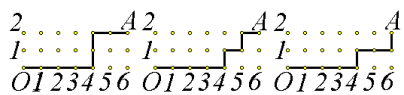
По-нататък, ако мухата временно спира за момент в точките 2, 3, 4, 5 и 6, по същия начин преброяваме, че възможните пътища са съответно  $C_5^1$ ,  $C_4^1$ ,  $C_3^1$ ,  $C_2^1$  и  $C_1^1$  (фиг. 2.2 – 2.6).



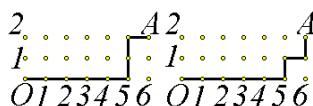
Фигура 2.2



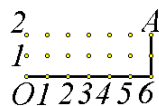
Фигура 2.3



Фигура 2.4



Фигура 2.5



Фигура 2.6

По този начин получаваме, че всички възможни пътища, които съответстват на правоъгълник  $2 \times 6$ , са  $C_7^1 + C_6^1 + C_5^1 + C_4^1 + C_3^1 + C_2^1 + C_1^1$ . Ясно е, че тази сума е равна на  $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ . Ако разгледаме правоъгълника  $2 \times n$ , търсеният брой пътища е равен на  $C_{n+1}^1 + C_n^1 + C_{n-1}^1 + \dots + C_3^1 + C_2^1 + C_1^1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ . Ще покажем още един начин за пресмятане на тази сума. Той се основава на следната:

**Лема.** Ако  $s \geq k$ , изпълнено е равенството:

$$C_s^k + C_{s-1}^k + C_{s-2}^k + \dots + C_{k+2}^k + C_{k+1}^k + C_k^k = C_{s+1}^{k+1}.$$

**Доказателство.** Ще използваме основното комбинаторно равенство, за да запишем следните равенства:  $C_{s-1}^{k+1} = C_s^{k+1} - C_{s-1}^k$ ,  $C_{s-2}^{k+1} = C_{s-1}^{k+1} - C_{s-2}^k$ ,  $\dots$ ,  $C_{k+3}^{k+1} = C_{k+4}^{k+1} - C_{k+3}^k$ ,  $C_{k+2}^{k+1} = C_{k+3}^{k+1} - C_{k+2}^k$ ,  $C_{k+1}^{k+1} = C_{k+2}^{k+1} - C_{k+1}^k$ . След почленно събиране на тези равенства получаваме

$$C_{k+1}^{k+1} = C_s^{k+1} - C_{s-1}^k - C_{s-2}^k - \dots - C_{k+3}^k - C_{k+2}^k - C_{k+1}^k.$$

Следователно  $C_{s-1}^k + C_{s-2}^k + \dots + C_{k+3}^k + C_{k+2}^k + C_{k+1}^k + C_k^k = C_s^{k+1}$  (използвахахме, че  $C_{k+1}^{k+1} = C_k^k$ ). От последното и основното комбинаторно равенство получаваме

$$C_s^k + (C_{s-1}^k + C_{s-2}^k + \dots + C_{k+2}^k + C_{k+1}^k + C_k^k) = C_s^k + C_s^{k+1} = C_{s+1}^{k+1}.$$

С това лемата е доказана.

От лемата при  $s = n+1$  и  $k = 1$  отново получаваме

$$C_{n+1}^1 + C_n^1 + C_{n-1}^1 + \dots + C_3^1 + C_2^1 + C_1^1 = C_{n+2}^2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Установихме, че в случаите  $1 \times n$  и  $2 \times n$  възможните пътища са съответно  $C_{n+1}^1$  и  $C_{n+2}^2$ . Тези резултати ни дават основание да направим следното индукционно предположение: *За правоъгълник  $(m-1) \times n$  всички възможни пътища са  $C_{n+m-1}^{m-1}$ .* Сега да разгледаме правоъгълник  $m \times n$ . Както в случая с  $2 \times 6$  правоъгълника предполагахме, че мухата тръгва вертикално и спира в точката 1. Според индукционното предположение възможните пътища на мухата са  $C_{n+m-1}^{m-1}$ . След това мухата спира във всяка от точките 1, 2, 3, ...,  $n-2$ ,  $n-1$  и  $n$ . Отново според индукционното предположение получаваме, че в съответните случаи пътищата са  $C_{n+m-2}^{m-1}$ ,  $C_{n+m-3}^{m-1}$ ,  $C_{n+m-4}^{m-1}$ , ...,  $C_{m+1}^{m-1}$ ,  $C_m^{m-1}$ ,  $C_{m-1}^{m-1}$ . Така, като използваме лемата, получаваме, че общият брой пътища е равен на  $C_{n+m-1}^{m-1} + C_{n+m-2}^{m-1} + C_{n+m-3}^{m-1} + C_{n+m-4}^{m-1} + \dots + C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1} = C_{n+m}^m$ . Въз основа на метода на математическата индукция заключаваме, че броят на всички възможни пътища, които може да измине мухата в правоъгълник  $m \times n$ , е равен на  $C_{n+m}^m = \frac{(n+m)!}{n!m!}$ . Ако  $m = 3$  и  $n = 6$ , пътищата са  $\frac{9!}{6!3!} = 84$ .

**Задача 2.** Върху страните на  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  на триъгълник  $ABC$ , външно за триъгълника, са построени съответно квадратите  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_2$  и  $CAA_2C_2$ . Ако лицата на шестоъгълника  $A_1B_1B_2C_1C_2A_2$  и триъгълника  $\bar{ABC}$  са съответно  $S_6$  и  $S$ , да се намери най-малката стойност на частното  $\frac{S_6}{S}$ .

Христо Лесов, Казанлък

**Решение:** лицето  $S_6$  на шестоъгълника  $A_1B_1B_2C_1C_2A_2$  е сбор от лицето  $S$  на  $\triangle ABC$ , лицата на квадратите  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_2$ ,  $CAA_2C_2$  и лицата на триъгълниците  $AA_1A_2$ ,  $BB_1B_2$  и  $CC_1C_2$ . Означаваме дължините на страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  съответно с  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Тогава лицата на квадратите  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_2$  и  $CAA_2C_2$  са съответно равни на  $c^2$ ,  $a^2$  и  $b^2$ . Ако  $\sphericalangle BAC = \alpha$ ,  $\sphericalangle ABC = \beta$  и  $\sphericalangle BCA = \gamma$ , то  $\sphericalangle A_1AA_2 = 180^\circ - \alpha$ ,  $\sphericalangle B_1BB_2 = 180^\circ - \beta$

и  $\sphericalangle C_1CC_2 = 180^\circ - \gamma$ . Следователно  $S_{AA_1A_2} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = S$ ,

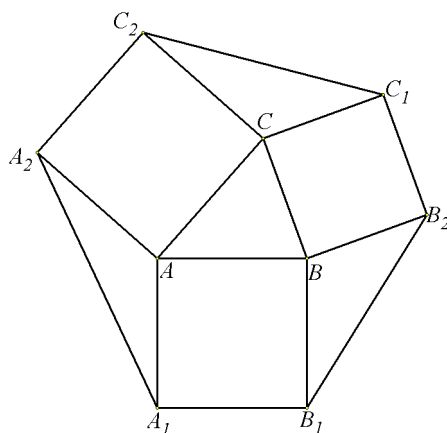
$S_{BB_1B_2} = \frac{1}{2}ca \sin \beta = S$  и  $S_{CC_1C_2} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = S$ . Така получаваме, че

$S_6 = 4S + a^2 + b^2 + c^2$ . От известните зависимости  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$  и

$S = \frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}$ , които са изпълнени за всеки триъгълник, се получава  $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0$ . Равенство

е изпълнено тогава и само тогава, когато  $a = b = c$ , т.е.  $\triangle ABC$  е равностранен. Следователно  $S_6 \geq 4S + 4\sqrt{3}S = 4(\sqrt{3} + 1)S$ , т.е.  $\frac{S_6}{S} \geq 4(\sqrt{3} + 1)$ . Това

означава, че търсената най-малка стойност е  $4(\sqrt{3} + 1)$  и се достига само при равностранен триъгълник  $ABC$ .



**Задача 3.** Мерките на ъглите при върховете  $A$ ,  $B$  и  $C$  на  $\triangle ABC$  са съответно  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , а  $M$  и  $N$  са точки от  $\sphericalangle ACB$ , за които са изпълнени равенствата  $\sphericalangle AMC = 2\beta$ ,  $\sphericalangle BMC = \alpha + \frac{\gamma}{2}$ ,  $\sphericalangle BNC = 2\alpha$  и  $\sphericalangle ANC = \beta + \frac{\gamma}{2}$ . Ако

$E$  е средата на  $AB$ , а  $L$  е пресечната точка на ъглополовящата на  $\sphericalangle ACB$  и  $AB$ , да се докаже, че точките  $M$ ,  $N$ ,  $L$  и  $E$  лежат на една окръжност.

Хаим Хаимов, Варна

