

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2014

Задача 1. Да се намерят всички рационални стойности на параметъра k , за които уравнението $(k-10)x^2 - (2k-21)x - 2k + 22 = 0$, $k \neq 10$ притежава целочислени корени.

Милен Найденов, Варна

Решение: Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението, то $x_1 + x_2 = \frac{2k-21}{k-10} = 2 - \frac{1}{k-10}$ е цяло число. Затова $\frac{1}{k-10} = p$ е цяло. Оттук получаваме $k = \frac{10p+1}{p}$. За дискриминантата D на уравнението намираме $D = \frac{(p-6)^2 - 24}{p^2}$. Тъй като D трябва да е точен квадрат, то $(p-6)^2 - 24 = n^2$ за някое цяло число n . Последното равенство записваме във вида $(p-6-n)(p-6+n) = 24$. Оттук следват системите уравнения:

$$\begin{array}{llll} \left| \begin{array}{l} p-6-n=\pm 2, \\ p-6+n=\pm 12, \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} p-6-n=\pm 12, \\ p-6+n=\pm 2, \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} p-6-n=\pm 4, \\ p-6+n=\pm 6, \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} p-6-n=\pm 6, \\ p-6+n=\pm 4. \end{array} \right. \end{array}$$

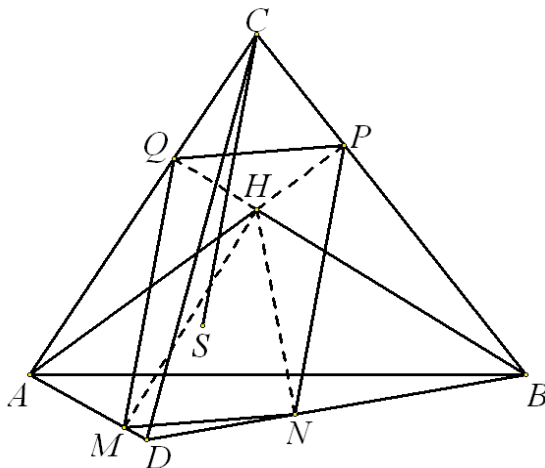
От тези системи намираме, че p приема стойностите $p_1 = -1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 11$ и $p_4 = 13$. Тези стойности на p водят съответно до $k_1 = 9$, $k_2 = 11$, $k_3 = \frac{111}{11}$ и $k_4 = \frac{131}{13}$. Следователно $k \in \left\{ 9, 11, \frac{111}{11}, \frac{131}{13} \right\}$.

Задача 2. Даден е остроъгълн триъгълник ABC с ортоцентър H и радиус на описаната окръжност R , за който $\sphericalangle BAC = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$. Ако D е точка от полуравнината относно правата AB , несъдържаща триъгълника, за която $\sphericalangle ADC = 180^\circ - 2\beta$ и $\sphericalangle BDC = 180^\circ - 2\alpha$, да се докаже, че $HD = R$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$. От условието следва $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC + \sphericalangle BDC = 2\gamma$. Лесно се забелязва, че $AH = 2R \cos \alpha$, $BH = 2R \cos \beta$ и $CH = 2R \cos \gamma$. Ще докажем, че ортогоналните проекции M , N , P и Q на H съответно върху прави-

те AD , DB , BC , и CA са върхове на успоредник. Имаме $QM = AM \sin \angle QAM = 2R \cos \alpha \cdot \frac{CD}{AC} \cdot \sin \angle ADC = \frac{CD}{\sin \beta} \cdot \cos \alpha \cdot \sin 2\beta = 2CD \cos \alpha \cos \beta$. Аналогично се получава, че $PN = 2CD \cos \alpha \cos \beta$. Следователно $QM = PN$. От друга страна, имаме $\angle AMQ + \angle BPN = \angle AHM + \angle BHN = \angle AHB - \angle MHN = (180^\circ - \gamma) - (180^\circ - 2\gamma) = \gamma$, т.е. $\angle ACB = \angle AQM + \angle BPN$. Нека сега CS е права през C , успоредна на QM . От равенствата $\angle PCS = \angle ACB - \angle ACS = \angle ACB - \angle AQM = \angle BPN$ следва, че $CS \parallel PN$. Оттук заключаваме, че $QM \parallel PN$. Това показва, че $MNPQ$ е успоредник. Следователно $MN = QP$ и $HD = \frac{MN}{\sin \angle MDN} = \frac{QP}{\sin 2\gamma} = \frac{CH \sin \gamma}{\sin 2\gamma} = \frac{2R \cos \gamma \sin \gamma}{2 \sin \gamma \cos \gamma} = R$. С това задачата е решена.



Задача 3. Нека $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_nB_nC_n$ са произволни еднакво ориентирани равностранни триъгълници от една равнина. Да се докаже, че центровете на тежестта G_a , G_b и G_c съответно на многоъгълниците $A_1A_2 \dots A_n$, $B_1B_2 \dots B_n$ и $C_1C_2 \dots C_n$ са върхове на равностранен триъгълник.

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: Доказателството на твърдението на тази задача ще извършим с използване на комплексни числа, като, както обикновено, точките ще означаваме с големи букви, а афиксите им ще означаваме със съответните малки букви. Нека G_k ($k=1,2,\dots,n$) и G са центровете на тежестта съответно на триъгълниците

$A_k B_k C_k$ ($k=1,2,\dots,n$) и $G_a G_b G_c$. Тогава са изпълнени равенствата $g_k = \frac{1}{3}(a_k + b_k + c_k)$ ($k=1,2,\dots,n$), $g_a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, $g_b = \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$, $g_c = \frac{1}{n}(c_1 + c_2 + \dots + c_n)$ и $g = \frac{1}{3}(g_a + g_b + g_c)$. Оттук следва, че $g = \frac{1}{n}(g_1 + g_2 + \dots + g_n)$. Нека триъгълниците $A_k B_k C_k$ ($k=1,2,\dots,n$) са ориентирани в посока, обратна на часовниковата стрелка, и $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($i^2 = -1$). Тогава са изпълнени равенствата $b_k = \omega a_k + (1-\omega)g_k$ и $c_k = \omega^2 a_k + (1-\omega^2)g_k$ ($k=1,2,\dots,n$). Оттук следват зависимостите $g_b = \omega g_a - (1-\omega)g$ и $g_c = \omega^2 g_a - (1-\omega^2)g$. Сега забелязваме, че са изпълнени равенствата $g - g_b = \omega(g - g_a)$ и $g - g_c = \omega^2(g - g_a)$. Последните равенства показват, че точките G_b и G_c се получават от G_a при ротация с център G съответно на ъгли 120° и 240° . Следователно триъгълникът $G_a G_b G_c$ е равностранен.

