

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2013

Задача 1. Да се намерят всички реални функции $f(x): (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$, за които при $x > 1$ и $y > 0$ е изпълнено равенството $f(x^y) = (f(x))^y$.

Йон Неделку, Плоещ и Лучиан Тутеску, Крайова, Румъния

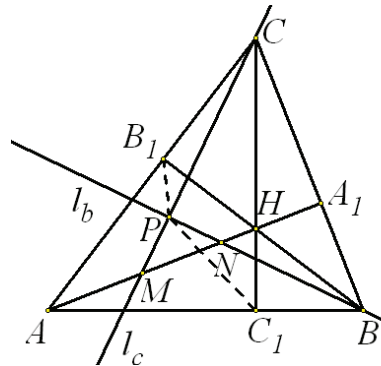
Решение: Нека $y = \frac{1}{\ln x} = \log_x e$. Тогава $f(x^y) = f(x_1^{\log_x e}) = f(e)$. Полагаме $f(e) = a > 1$. От условието получаваме $a = f(e) = (f(x))^{\frac{1}{\ln x}}$, откъдето $f(x) = a^{\ln x}$. Освен това $a^{\ln x} = e^{\ln a \cdot \ln x} = e^{\ln x \cdot \ln a} = (e^{\ln x})^{\ln a} = x^{\ln a}$. Затова, като положим $\ln a = \alpha > 0$, получаваме, че търсените функции са $f(x) = x^\alpha$ за всички $\alpha > 0$.

Задача 2. Височините AA_1 , BB_1 и CC_1 на остроъгълен триъгълник ABC се пресичат в точка H . Ако правите l_b и l_c минават съответно през върховете B и C , така че $l_b \perp l_c$, $l_b \cap AA_1 = N$ и $l_c \cap AA_1 = M$, да се докаже, че описаните окръжности на триъгълниците AB_1M , HC_1M , AC_1N , HB_1N , A_1BM , A_1CN и окръжността с диаметър страната BC имат обща точка.

Хаим Химов, Варна

Решение: Означаваме пресечната точка на l_b и l_c с P . От условието имаме $\angle BPM = \angle MA_1B = 90^\circ$, откъдето следва, че точките M , B , A_1 и P лежат на една окръжност. Следователно P лежи върху описаната окръжност k_1 на $\triangle A_1BM$. Аналогично от равенството $\angle NPC = \angle NA_1C = 90^\circ$ следва, че P лежи върху описаната окръжност k_2 на $\triangle A_1CN$. Лесно се вижда, че точката P лежи върху окръжността k_3 с диаметър BC . Тъй като $P \in k_1$, то $\angle PMA_1 = \angle PBA_1$. Освен това от вписания четириъгълник PC_1BC следва, че $\angle PBA_1 = \angle PC_1C$.

Така получаваме, че $\angle PMA_1 = \angle PC_1C$, т.е. $\angle PMH = \angle PC_1H$, откъдето следва, че точките P , M , C_1 и H лежат на една окръжност. Следователно P лежи върху описаната окръжност на $\triangle HC_1M$. Аналогично се доказва, че P лежи върху описаната окръжност на $\triangle HB_1N$. Тъй като четириъгълникът PB_1CC_1 е вписан в k_3 , то



$\sphericalangle AB_1P = \sphericalangle PC_1C$. Това равенство заедно с вече доказаното $\sphericalangle PMA_1 = \sphericalangle PC_1C$ води до $\sphericalangle AB_1P = \sphericalangle PMA_1$. Затова четириъгълникът $AMPB_1$ е вписан в окръжност и следователно P лежи върху описаната окръжност на $\triangle AB_1M$. По същия начин се доказва, че P лежи върху описаната окръжност на $\triangle AC_1N$. С това задачата е решена.

Задача 3. Триъгълник с медицентър G е описан около окръжност $k(I, r)$, така че $IG \perp AB$.

а) Ако h_c и r_c са дължините на височината през C и радиусът на външно вписаната за $\triangle ABC$ окръжност, допираща се до страната AB , да се докаже, че $h_c = 4r$ и $r_c = 2r$.

б) Да се построи триъгълник ABC по дадени r и дължина c на страната AB .

Христо Лесов, Казанлък

Решение: За определеност считаме, че $AC > BC$. Нека P е средата на AB , L пресечната точка на CI с AB . От свойството на ъглополовящата CL в $\triangle ABC$ имаме $\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC}$ или $\frac{AL + BL}{BL} = \frac{AC + BC}{BC}$, откъдето $BL = \frac{BL}{AC + BC} \cdot AB < \frac{1}{2} AB = BP$. Затова L е между B и P .

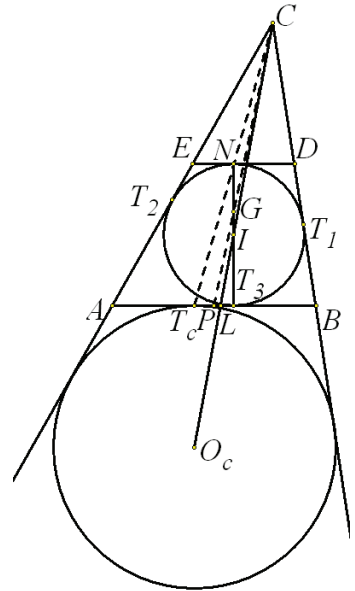
Нека окръжността k се допира до страната AB в точка T_3 , а външновписаната окръжност k_c с център O_c и радиус r_c се допира до страната AB в точка T_c .

Тогава $AT_c = \frac{1}{2}(AB + BC - AC) < \frac{1}{2} AB = AP$ и затова

точките A, T_c, P, L, T_3 и B са разположени в този ред върху правата AB . По условие $IG \perp AB$ и затова T_3, I и G лежат в този ред на диаметър на k . Ако означим с N диаметрално противоположната точка на T_3 върху k , то $IN = IT_3$. Тъй като $BT_3 = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$,

то P е среда на отсечката T_3T_c . Следователно IP е средна отсечка в $\triangle NT_3T_c$. Затова

$NT_c \parallel IP$ и $NT_c = 2IP$. През точката N построяваме допирателната към k . Нека тя пресича правите BC и AC съответно в точките D и E . Тогава $DE \perp IN$, $DE \parallel AB$ и триъгълниците ABC и EDC са хомотетични с център C , при което T_c се преобразува в N , а k_c в k . Следователно точките C, N и T_c лежат на една права и $CN \parallel IP$. Така получаваме, че триъгълниците CNG и PIG са хомотетични с център



G и $\frac{CN}{IP} = \frac{NG}{IG} = \frac{CG}{GP} = 2$. Оттук $CN = 2IP = NT_c$ и $NG = 2IG$. Това означава, че IN е средна отсечка в $\triangle COO_c$. Следователно $CI = IO_c$, $r_c = O_cT_c = 2IN = 2r$ и N е точката на Нагел за $\triangle ABC$, която лежи върху средната отсечка DE на $\triangle ABC$. Ако $CF \perp AB$ ($F \in AB$), то $CF \parallel NT_3$ и затова CF е средна отсечка в $\triangle CET_c$. Оттук $h_c = CF = 2NT_3 = 2.2r = 4r$.

б) Ще използваме твърдение 2 от статията „Разположение на забележителни точки и прави в триъгълника“ в кн. 4, 2014 г. на сп. „Математика и информатика, стр. 339, съгласно което $IG \perp AB$ тогава и само тогава, когато $AC + BC = 3AB$. Нека окръжността k се допира до BC и AC съответно в точки T_1 и T_2 . Тогава $CT_1 = CT_2 = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = AB$ и правоъгълните триъгълници CIT_1 и CIT_2 могат да се построят по дадени катети $IT_1 = IT_2 = r$ и $CT_1 = CT_2 = c$. След това има два варианта: I) Построяваме окръжността $k(I, r)$ и окръжност с център C и радиус $4r$. Общата външна допирателна към тези окръжности пресича правите CT_1 и CT_2 съответно в точките A и B . II) Върху продължението на CI нанасяме отсечка $IO_c = CI$ и построяваме окръжността k_c с център O_c и радиус $r_c = 2r$. Общата вътрешна допирателна на k и k_c пресича CT_1 и CT_2 съответно в точките A и B .