

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2012

Задача 1. За всяко реално число x означаваме с $[x]$ най-голямото цяло число, което е по-малко или равно на x . Да се намерят всички прости числа p , за които числото $\left[\frac{p^2+1}{2}\right] + \left[\frac{p^2+2}{3}\right] + \left[\frac{p^2+7}{8}\right] + \left[\frac{p^2+18}{24}\right]$ е просто.

Д-р Светлозар Дойчев

Решение: (Валери Цеков)

Нека $f(p) = \left[\frac{p^2+1}{2}\right] + \left[\frac{p^2+2}{3}\right] + \left[\frac{p^2+7}{8}\right] + \left[\frac{p^2+18}{24}\right]$. Тогава $f(2) = 5, f(3) = 1$,

а по-големите от 3 прости числа имат вида $12k \pm 1$ за естествено k или $12k \pm 5$ за цяло $k \geq 0$ и лесно се проверява, че за такива числа $f(12k \pm 1) = 3(48k^2 \pm 8k + 1)$ и $f(12k \pm 5) = 3(48k^2 \pm 40k + 9)$. Тъй като числото 3 дели числата $f(12k \pm 1)$ и $f(12k \pm 5)$ и очевидно е по-малко от тях, то единствените решения на задачата са $p = 2$ и $p = 3$.

Задача 2. Да се намерят всички цели положителни числа x, y и n , за които е вярно равенството $x^2 + 8xy + 2x + 12y^2 - 3 = p^n$, където p е просто число.

Д-р Светлозар Дойчев

Решение: (Валери Цеков)

Разглеждаме възможните случаи за числото x :

Първи случай: x е нечетно, т.е. $x = 2z+1$ за някое неотрицателно цяло число z . Тогава даденото равенство може да се запише във вида $4(y+z)(3y+z+2) = p^n$, откъдето следва, че $p = 2$ и $(y+z)(3y+z+2) = 2^{n-2}$. В този случай:

(1) $y + z = 2^u$ и $3y + z + 2 = 2^v$ за неотрицателни цели u и v , $u < v$, $u + v = n - 2 > 0$.

Като умножим по 3 първото от равенствата в (1) и извадим от него второто, ще получим:

(2) $2(z-1) = 3 \cdot 2^u - 2^v = 2^u(3 - 2^{v-u})$.

Понеже (2) очевидно не е възможно за $z = 1$, то налице са подслучаите:

1) $z = 0$ и тогава $2^v = 3 \cdot 2^u + 2$. За $u = 1$ от последното равенство и от (1) има-

ме $v = 3, y = 2, n = 6$ и получаваме решението $x = 1, y = 2, n = 6$. За $u > 1$ горното равенство е невъзможно, тъй като дясната му страна се дели на нечетното число $3 \cdot 2^{u-1} + 1 > 1$.

2) $z > 1$ и тогава $3 > 2^{v-u}$, което е възможно само за $v - u = 1$, т.е. $v = u + 1$, откъдето с помощта на (1) и (2) получаваме последователно $u = \frac{n-3}{2}, v = \frac{n-1}{2}$,
 $z = 2^{\frac{n-5}{2}} + 1, x = 2^{\frac{n-3}{2}} + 3, y = 2^{\frac{n-5}{2}} - 1$ за нечетно $n > 5$. И така, в случая решенията са безбройно много: $x = 2^{\frac{n-3}{2}} + 3, y = 2^{\frac{n-5}{2}} - 1$ за всяко нечетно естествено $n > 5$.

Втори случай: x е четно, т.е. $x = 2z$ за някое естествено z . Даденото равенство може да се запише във вида $(6y + 2z + 3)(2y + 2z - 1) = p^n$, откъдето следва, че p е нечетно и $6y + 2z + 3 = p^u$ и $2y + 2z - 1 = p^v$ за естествени u и $v, u > v, u + v = n$. Като умножим по 3 второто от горните две равенства и го извадим от първото, ще получим равенството $6 - 4z = p^v(p^{u-v} - 3)$. Тъй като $p^{u-v} - 3 \geq 0$, то трябва да имаме $z = 1$ и тогава $p^v(p^{u-v} - 3) = 2$, което очевидно не е възможно за нечетно p . Следователно всичките решения на задачата са:

$$x = 1, y = 2, n = 6;$$

$$x = 2^{\frac{n-3}{2}} + 3, y = 2^{\frac{n-5}{2}} - 1 \text{ за всяко нечетно естествено } n > 5.$$

Задача 3. Да се намери най-малкото естествено число със сума от цифрите 2012 и произведение на цифрите, което е степен на числото 6.

д-р Светлозар Дойчев

Решение: (Валери Цеков) Нека произведението от цифрите на търсеното число е равно на 6^{6n+k} за някое естествено n и цяло $k, 0 \leq k \leq 5$. Измежду всички числа, които отговарят на двете условия за цифрите им, най-малкото ще бъде това, което има най-малко на брой цифри и те са подредени във възходящ ред отляво надясно. Най-малкият брой цифри, които можем да получим от всеки множител 6^6 на произведението 6^{6n+k} , е пет, а самите цифри са 8, 8, 9, 9, 9 и сумата им е 43. Тогава сумата на всичките получени от 6^{6n} по описания начин $5n$ на брой цифри 8 и 9 е равна на $43n$ и тъй като $2012 = 43 \cdot 46 + 34$, то $n = 46$. Лесно се съобразява, че събираемото 34 от горното равенство може да се получи за цифрите 2, 6, 8, 9, 9 при $k = 5$. Тогава търсеното най-малко естествено число ще има отляво надясно

но следните 235 на брой цифри: 1 брой цифрата 2, 1 брой цифрата 6, $2.46+1=93$ броя цифрата 8 и $3.46 + 2 = 140$ броя цифрата 9. Така получаваме, че търсеното число е $26\underbrace{88\dots 8}_{93}\underbrace{99\dots 9}_{140}$.

Забележка: Условието на задача 1 от брой 4, 2013 г. трябва да се чете така:

а) Покажете, че ако $x \geq -1$, то $9x^3 + 3x^2 + 1 \geq 5x$.

б) Намерете реалните стойности на k , при които за всички $a, b, c \in [-1, +\infty)$ е изпълнено неравенството $3(a^3 + b^3 + c^3) + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq k(a + b + c)$. (Техническата грешка е в допълнителното събираемо 1 в лявата страна на последното неравенство.)