

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2011

Задача 1. Да се докаже, че за всяко цяло положително число k уравнението $x_1^3 + \dots + x_k^3 + x_{k+1}^2 = x_{k+2}^4$ има безброй много решения в цели положителни числа $x_1, \dots, x_{k+2}$ такива, че $x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1}$.

Решение на тази задача е поместено в брой 2 от тази година на страница 163.

Задача 2. Нека a , b и c са положителни реални числа такива, че $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4$. Да се докаже неравенството

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

Решение: Въвеждаме означенията $\alpha = b+c$, $\beta = c+a$ и $\gamma = a+b$. Оттук $a = \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2}$, $b = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}$ и $c = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}$. От условието следва, че $(b+c)^2 + (c+a)^2 + (a+b)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4$, т.е. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq 4$. Сега след заместване в лявата страна на желаното неравенство получаваме последователно

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma^2 - (\alpha - \beta)^2 + 4}{4\gamma^2} + \frac{\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2 + 4}{4\alpha^2} + \frac{\beta^2 - (\alpha - \beta)^2 + 4}{4\gamma^2} \geq \\ & \geq \frac{\gamma^2 - (\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4\gamma^2} + \frac{\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4\alpha^2} + \frac{\beta^2 - (\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4\gamma^2} = \\ & = \frac{2\gamma^2 + 2\alpha\beta}{4\gamma^2} + \frac{2\alpha^2 + 2\beta\gamma}{4\alpha^2} + \frac{2\beta^2 + 2\gamma\alpha}{4\beta^2} = \frac{3}{2} + \frac{\alpha\beta}{2\gamma^2} + \frac{\beta\gamma}{2\alpha^2} + \frac{\gamma\alpha}{2\beta^2}. \end{aligned}$$

Остава да отбележим, че от неравенството между средното аритметично и средното геометрично следва $\frac{\alpha\beta}{2\gamma^2} + \frac{\beta\gamma}{2\alpha^2} + \frac{\gamma\alpha}{2\beta^2} \geq \frac{3}{2}$, с което задачата е решена.

Задача 3. Съществуват ли цели положителни числа a , b и c такива, че и трите числа $a^2 + b + c$, $b^2 + c + a$ и $c^2 + a + b$ са точни квадрати на цели числа?

Решение: Да предположим, че трите числа $a^2 + b + c$, $b^2 + c + a$ и $c^2 + a + b$ са точни квадрати на цели числа. Тъй като $a^2 + b + c$ е квадрат на цяло число по-голямо от a^2 , то $a^2 + b + c \geq (a+1)^2$. Следователно $b + c \geq 2a + 1$. Подобно се получават неравенствата $c + a \geq 2b + 1$ и $a + b \geq 2c + 1$. След почленно събиране на последните три неравенства получаваме $2(a + b + c) \geq 2(a + b + c) + 3$, което е невъзможно. Следователно числата $a^2 + b + c$, $b^2 + c + a$ и $c^2 + a + b$ не могат да са едновременно точни квадрати.