

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2018

Задача 1. Ако N_1 и N_2 са съвършени числа, за които целите части на числата $\frac{N_1}{2018}$ и $\frac{2018}{N_2}$ са равни и различни от нула, да се намери $N_1 + N_2$.

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение. Първите пет съвършени числа са следните: 6, 28, 496, 8128, 33550336. Числото $\frac{2018}{N_2}$ има най-голяма цяла част при $N_2 = 6$. Тя е равна на 336. Освен това $\left\lceil \frac{33550336}{2018} \right\rceil = 16625 > 336$. Това означава, че ако е изпълнено равенството $\left\lceil \frac{N_1}{2018} \right\rceil = \left\lceil \frac{2018}{N_2} \right\rceil$, то $N_1 = 8128$ и $N_2 \in \{28, 496\}$. Сега, като забележим, че $8128 = 4 \cdot 2018 + 56$ и $2018 = 4 \cdot 496 + 34$, стигаме до извода, че $N_1 = 8128$ и $N_2 = 496$. Следователно $N_1 + N_2 = 8624$.

Задача 2. Даден е квадрат $ABCD$ с център O и страна a . Точката K е средата на CD , а C_1 и D_1 са средите съответно на CK и DK . Ако $AC \cap BC_1 = B_1$, $BD \cap AD_1 = A_1$ и S е лицето на петоъгълника $A_1OB_1C_1D_1$, да се намерят всички целочислени двойки (a, S) .

Милен Найденов, Варна

Решение. Тъй като $\triangle ABA_1 \sim \triangle DD_1A_1$, то $\frac{AA_1}{D_1A_1} = \frac{BA_1}{DA_1} = \frac{AB}{DD_1} = 4$. От $AA_1 = 4D_1A_1$ следва, че $S_{AA_1D} = 4 \cdot S_{A_1D_1D}$. Освен това

$$\frac{BA_1}{DA_1} = \frac{BO + OA_1}{DA_1} = \frac{DO + OA_1}{DA_1} = \frac{DA_1 + OA_1 + OA_1}{DA_1} = 1 + 2 \cdot \frac{OA_1}{DA_1}.$$

Сега от $\frac{BA_1}{DA_1} = 4$ получаваме $\frac{OA_1}{DA_1} = \frac{3}{2}$.

Следователно $\frac{S_{OA_1A}}{S_{A_1DA}} = \frac{OA_1}{DA_1} = \frac{3}{2}$, откъдето

$S_{OA_1A} = \frac{3}{2} S_{A_1DA} = \frac{3}{2} \cdot 4 S_{A_1D_1D} = 6 S_{A_1D_1D}$. Така стига-
ме до М

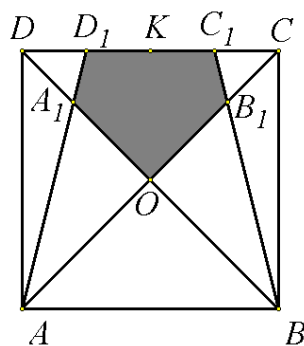
$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{AOD} = 4 \cdot (S_{A_1D_1D} + S_{OA_1A}) = 40 \cdot S_{A_1D_1D}$$

$$\text{и } S = S_{CDO} - 2S_{A_1D_1D} = \frac{1}{4} S_{ABCD} - 2S_{A_1D_1D} = 8S_{A_1D_1D}.$$

Оттук следва $S_{ABCD} = 5S$ и $S = \frac{a^2}{5}$. За да бъде цяло числото S , необхо-

димо е да е изпълнено равенството $a = 5k$, където $k = 1, 2, 3, \dots$. Следова-
телно всички целочислени двойки (a, S) са следните: $(5k, 5k^2)$, където

$$k = 1, 2, 3, \dots$$



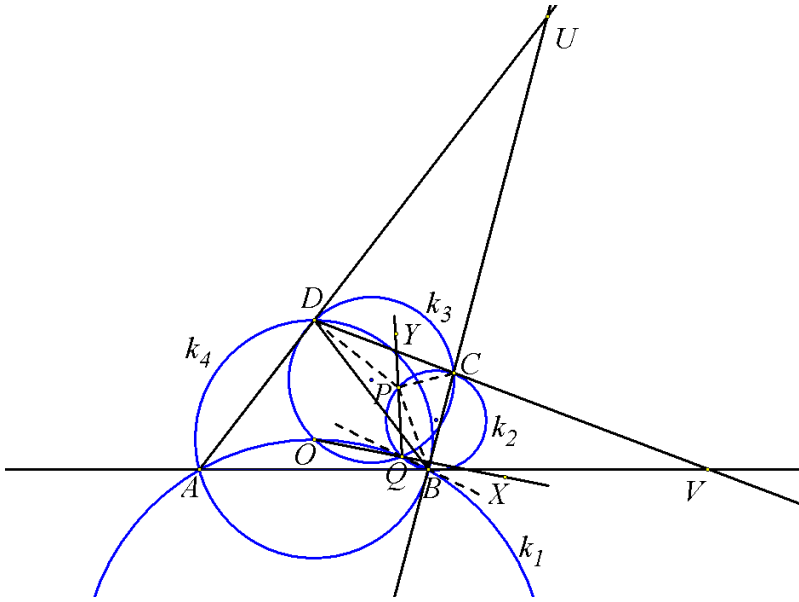
Задача 3. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = \beta$ ($\beta > 45^\circ$) и $\sphericalangle BCD = \gamma$. Нека O е центърът на описаната около $\triangle ABD$ окръжност, а P е такава вътрешна за $\triangle BCD$ точка, че са изпълнени равенствата $\sphericalangle DPC = 180^\circ - \beta$ и $\sphericalangle BPC = 180^\circ - \gamma$. Да се докаже, че описаните около триъгълниците AOB , BPC , COD и ABD окръжности минават през една точка.

Хаим Хаимов, Варна

Решение. Означаваме описаните около триъгълниците AOB , BPC , COD и ABD окръжности съответно с k_1 , k_2 , k_3 и k_4 . Означаваме с Q втората обща точка на окръжностите k_1 и k_3 . Нека P' е втората обща точка на описаните за триъгълниците BQC и AQD окръжности λ и μ . Ще докажем, че $P' \equiv P$. Оттук ще следва, че :

- 1) $P \in \lambda$, което означава, че $Q \in k_2$;
- 2) $P \in \mu$, което означава, че $Q \in k_4$.

По този начин ще бъде доказано, че окръжностите k_1 , k_2 , k_3 и k_4 минават през точката Q .



Нека $AB \cap CD = V$ и X е точка от лъча $OQ^{\rightarrow}$. Имаме $\sphericalangle BP'C = \sphericalangle BQC = \sphericalangle BQX + \sphericalangle CQX$, $\sphericalangle BQX = \sphericalangle BAD$ и $\sphericalangle CQX = \sphericalangle CDO$. Следователно $\sphericalangle BP'C = \sphericalangle BAO + \sphericalangle CDO$. От друга страна

$$\begin{aligned} \sphericalangle BAO + \sphericalangle CDO &= \sphericalangle AOD - \sphericalangle AVD = 2\beta - \sphericalangle BVD = \sphericalangle ABC - \sphericalangle BVC = \\ &= \sphericalangle BCV = 180^\circ - \sphericalangle BCD = 180^\circ - \gamma. \end{aligned}$$

Така получаваме $\sphericalangle BP'C = \sphericalangle BAO + \sphericalangle CDO = 180^\circ - \gamma$. Но по условие $\sphericalangle BPC = 180^\circ - \gamma$ и затова $\sphericalangle BP'C = \sphericalangle BPC$.

По-нататък нека $BC \cap AD = U$ и Y е точка от лъча $QP'^{\rightarrow}$. Имаме $\sphericalangle DP'C = \sphericalangle DP'Y + \sphericalangle CP'Y$, $\sphericalangle DP'Y = \sphericalangle DAQ$ и $\sphericalangle CP'Y = \sphericalangle CBQ$. Следователно $\sphericalangle DP'C = \sphericalangle DAQ + \sphericalangle CBQ$. От друга страна

$$\begin{aligned} \sphericalangle DAQ + \sphericalangle CBQ &= \sphericalangle AQB - \sphericalangle AUB = \sphericalangle AOB - (180^\circ - \sphericalangle BAD - \sphericalangle ABC) = \\ &= 2\sphericalangle ADB - (180^\circ - \beta - 2\beta) = 2(180^\circ - 2\beta) - (180^\circ - 3\beta) = 180^\circ - \beta. \end{aligned}$$

Сега от условието $\sphericalangle DPC = 180^\circ - \beta$ следва $\sphericalangle DP'C = \sphericalangle DPC$. От получените равенства $\sphericalangle BP'C = \sphericalangle BPC$ и $\sphericalangle DP'C = \sphericalangle DPC$ следва, че $P' \equiv P$, с което твърдението на задачата е доказано.

Забележка. Аналогично се доказва, че описаните окръжности на триъгълниците AOD , APB , BOC и CPD минават през една точка.