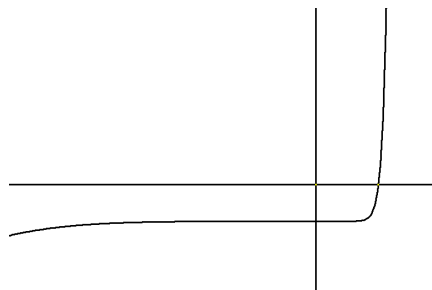
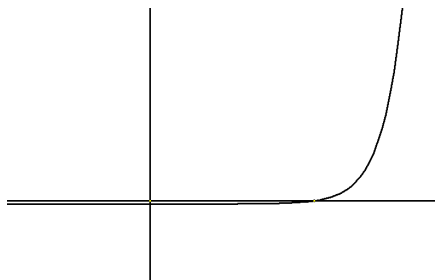


РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2015

Задача 1. Да се намери сборът от корените на уравненията $3 \cdot 2^x + 8 \cdot 3^x = 159000$ и $x^5 + 32 \cdot 11^x = 56697728$.

Милен Найденов, Варна

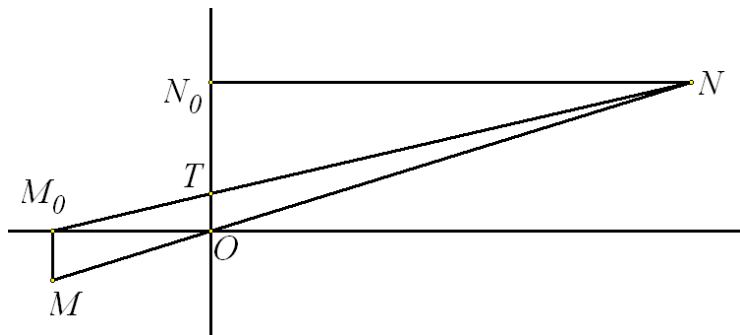
Решение. Разделяме двете страни на първото уравнение на 24 и получаваме $2^{x-3} + 3^{x-1} = 6625$. Полагаме $u = x - 2$ и уравнението добива вида $2^u + 6 \cdot 3^u = 13250$. Тъй като функцията $f(u) = 2^u + 6 \cdot 3^u - 13250$ е растяща (лявата графика на чертежа), то уравнението $f(u) = 0$ има единствено реално решение u_0 . С непосредствена проверка се вижда, че това решение е $u_0 = 7$. Оттук намираме, че $x_1 = u_0 + 2 = 9$ е единственото решение на първото уравнение. След това разделяме двете страни на второто уравнение на 32 и получаваме $\left(\frac{x}{2}\right)^5 + 11^{2\left(\frac{x}{2}\right)} = 1771804$. Полагаме $v = \frac{x}{2}$ и уравнението добива вида $v^5 + 11^{2v} = 1771804$. Тъй като функцията $f(v) = v^5 + 11^{2v} - 1771804$ е растяща (дясната графика на чертежа), то уравнението $f(v) = 0$ има единствено реално решение v_0 . С непосредствена проверка се вижда, че това решение е $v_0 = 3$. Оттук намираме, че $x_2 = 2 \cdot v_0 = 6$ е единственото решение на второто уравнение. От получените резултати следва, че търсената сума от корени е следната $x_1 + x_2 = 9 + 6 = 15$.



Задача 2. Перпендикулярните прави m и n се пресичат в точка O , а точките M и N лежат на права l , минаваща през O . Ортогоналната проекция на M върху m е M_0 , а ортогоналната проекция на N върху n е N_0 . Ако M_0N пресича отсечката ON_0 в точка T , а дължините на отсечките ON_0 и MM_0 са съответно 7 и 4, да се намери дължината на OT .

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение. От подобните триъгълници OMM_0 и NON_0 следва равенството $\frac{MM_0}{ON_0} = \frac{OM_0}{NN_0}$, а от подобните триъгълници M_0OT и NN_0T следва, че $\frac{OM_0}{NN_0} = \frac{OT}{N_0T}$. От тези равенства получаваме $\frac{MM_0}{ON_0} = \frac{OT}{N_0T}$. Оттук $MM_0 \cdot N_0T = OT \cdot ON_0$ и получаваме $MM_0 \cdot (ON_0 - OT) = OT \cdot ON_0$, $MM_0 \cdot ON_0 = OT \cdot ON_0 + OT \cdot MM_0$. Последното равенство разделяме на $MM_0 \cdot ON_0 \cdot OT$ и стигаме до $\frac{1}{OT} = \frac{1}{ON_0} + \frac{1}{MM_0}$. Сега след заместване намираме $OT = \frac{28}{11}$.

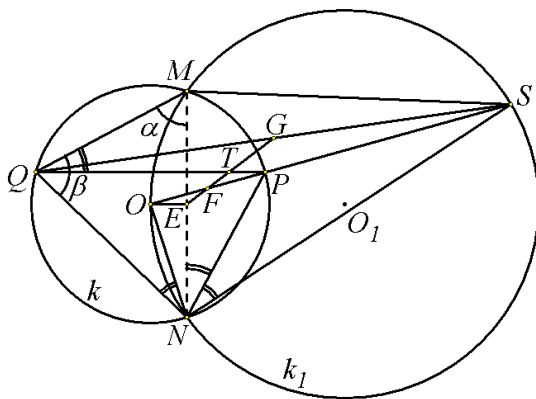


Задача 3. Окръжността k_1 минава през центъра O на окръжност k и я пресича в точките M и N . Върху вътрешната за k дъга $\widehat{MN}$ е избрана точка P . Нека $S = OP \cap k_1$ ($S \neq O$) и Q е такава точка от k , за която $QP \perp MN$. Да се докаже, че средите на отсечките MN , OP и QS лежат на една права.

Хаим Хаимов, Варна

Решение. Означаваме средите на отсечките MN и OP съответно с E и F . Нека още $EF \cap QP = G$ и $EF \cap QP = T$. За да решим задачата, достатъчно е да докажем, че G е среда на QS . От теоремата на Менелай за ΔQPS и правата FTG имаме $\frac{QT}{TP} \cdot \frac{FP}{SF} \cdot \frac{SG}{GQ} = 1$. Точката G е среда на QS , когато $\frac{SG}{GQ} = 1$. Следователно е достатъчно да докажем, че $\frac{QT}{TP} \cdot \frac{FP}{SF} = 1$. Сега с R и R_1 означаваме радиусите съответно на k и k_1 . Освен това, нека $\angle QMN = \alpha$ и $\angle MQN = \beta$. Тъй като $OM = ON$, то $\widehat{OM} = \widehat{ON}$ и $\angle OSM = \angle OSN$. Затова SO е ъглополовяща на $\angle MSN$. От друга страна, $\angle ONM = \angle OSM$ (ъгли, опиращи се на дъгата $\widehat{OM}$). Затова $\angle ONM = \angle OSN$. Тъй като $\angle OPN$ е външен за ΔNSP , то $\angle OPN = \angle PSN + \angle PNS$. Но от $OP = ON$ следва, че $\angle ONP = \angle OPN$. Това означава, че $\angle ONP = \angle OSN + \angle PNS$. От това равенство и $\angle ONP = \angle ONM + \angle MNP = \angle OSN + \angle MNP$ следва, че $\angle PNS = \angle MNP$. Следователно NP е ъглополовяща на $\angle MNS$ и точката P е центърът на вписаната в ΔMNS окръжност. Като вземем предвид, че $\angle ONQ = 90^\circ - \alpha$ и $\angle PNS = \angle PNM = \angle PQM = 90^\circ - \alpha$ (тъй като $QP \perp MN$), то $\angle ONQ = \angle PNS$ и $\angle QNP = \angle ONS$. Оттук намираме:

$$(1) \frac{QP}{OS} = \frac{2R \sin \angle QNP}{2R_1 \sin \angle ONS} = \frac{R}{R_1} = \frac{MN}{2 \sin \angle MQN} \cdot \frac{2 \sin \angle MSN}{MN} = \frac{\sin(180^\circ - 2\beta)}{\sin \beta} = 2 \cos \beta.$$



Тъй като $OE \perp MN$ и $QP \perp MN$, то $OE \parallel QP$. Но F е среда на OP и затова $\Delta OEF \cong \Delta PTF$. Следователно $OE = TP$. От това равенство полу-

чаваме $\frac{TP}{OF} = \frac{OE}{\frac{1}{2}OP} = 2 \cdot \frac{OE}{OM} = 2 \cos \beta$. От последното равенство и (1) следва,

че $\frac{QP}{OS} = \frac{TP}{OF} = 2 \cos \beta$. Следователно $\frac{QP-TP}{OS-OF} = \frac{TP}{OF} = 2 \cos \beta$, т.е. $\frac{QT}{SF} = 2 \cos \beta$.

Но $\frac{FP}{TP} = \frac{\frac{1}{2}OP}{OE} = \frac{\frac{1}{2}OM}{OE} = \frac{1}{2 \cos \beta}$. След почленно умножаване на последните две

равенства стигаме до равенството $\frac{QT}{TP} \cdot \frac{FP}{SF} = 1$, което трябваше да се докаже.