

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2014

Задача 1. Да се намерят всички реални стойности на a , b и c , при които корените на уравнението $x^2 + (1 + a^2 + b^2 + c^2)x + ab + bc + ca = 0$ са цели числа.

Милен Найденов, Варна

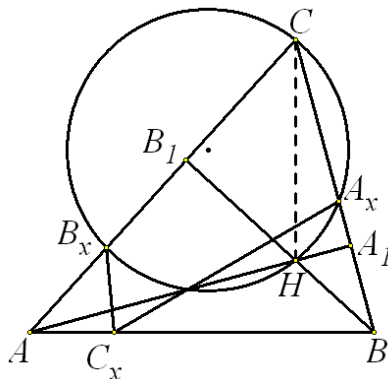
Решение: Дискриминантата на уравнението е

$$\begin{aligned} D &= a^2 + b^2 + c^2 + 1^2 - 4ab + bc + ca = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2 + b^2 + c^2 + 1 - 4ab + bc + ca + 4a^2 + b^2 + c^2 - 4a^2 + b^2 + c^2 = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2) + 1 + 2(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ca - 2bc) = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 - 1)^2 + 2(a - b)^2 + 2(b - c)^2 + 2(c - a)^2. \end{aligned}$$

За да са цели корените на уравнението, D трябва да е точен квадрат. От последното представяне се вижда, че едно достатъчно условие за това е $a = b = c$. В този случай корените на уравнението са $x_1 = -1$ и $x_2 = -3a^2$. Оттук следва, че уравнението има целочислени корени при $a = b = c = k_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), където $k_1 \in \mathbb{Z}$, $k_2 = \frac{k_1}{\sqrt{3}}$, $k_3 \in \{0, \pm\sqrt{1}, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{4}, \pm\sqrt{5}, \dots\}$ и $k_4 = \frac{k_3}{\sqrt{3}}$. За пълното решение на задачата са необходими допълнителни изследвания.

Задача 2. В остроъгълния триъгълник ABC точката C_x се движи по най-малката страна AB , а точките A_x и B_x се движат съответно по страните BC и AC , така че във всеки момент са изпълнени равенствата $C_x A_x = C_x B$ и $C_x B_x = C_x A$. Да се докаже, че окръжността k_{C_x} определена от точките A_x , B_x и C , има втора неподвижна точка. Коя е тази точка?

Хаим Хаимов, Варна



Решение: Нека AA_1 и BB_1 са височини в $\triangle ABC$, а H е неговият ортоцентър. Ще покажем, че окръжността k_x минава през H . От равенствата

$$B_x B_1 = |AB_1 - AB_x| = |AB \cos \angle BAC - 2AC_x \cos \angle BAC| = |BC_x - AC_x| \cos \angle BAC \text{ и}$$

$$A_x A_1 = |BA_x - BA_1| = |2BC_x \cos \angle ABC - AB \cos \angle ABC| = |BC_x - AC_x| \cos \angle ABC$$

Следва, че $\frac{B_x B_1}{A_x A_1} = \frac{\cos \angle BAC}{\cos \angle ABC} = \frac{CH \sin \angle ACH}{CH \sin \angle BCH} = \frac{B_1 H}{A_1 H}$. Тогава $\triangle A_x A_1 H \sim \triangle B_x B_1 H$ и оттук $\angle B_1 B_x H = \angle A_1 A_x H$, което означава, че четириъгълникът $B_x H A_x C$ е вписан в окръжността k_x . С това задачата е решена.

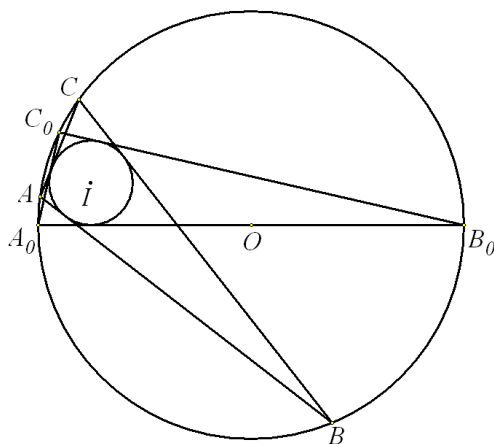
Задача 3. Правоъгълният триъгълник $A_0 B_0 C_0$ е вписан в окръжност $k_0(O, R)$ и е описан около окръжност $k_i(I, r)$.

а) Да се намерят страните на триъгълник ABC , вписан в $k_0(O, R)$ и описан около $k_i(I, r)$, така че той да има ъгъл 60° .

б) Да се докаже, че ако S_0 и S са лицата съответно на $\triangle A_0 B_0 C_0$ и $\triangle ABC$, то е изпълнено равенството $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(S_0 + r^2)$.

Сава Гроздев, София и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: Лицето S_Δ на триъгълник, който има ъгъл γ и е вписан в $k_0(O, R)$ и описан около $k_i(I, r)$, се пресмята по формулата $S_\Delta = 2Rr \sin \gamma + r^2 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$. Оттук за лицата на разглежданите триъгълници при $\gamma = 90^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$ се получават съответно формулите $S_0 = 2Rr + r^2$ и $S = \sqrt{3}r(R + r)$.



От тези формули непосредствено следва твърдение б) на задачата. Сега от равенствата $a + b + c = \frac{2S}{r}$, $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr = \left(\frac{S}{r}\right)^2 + r^2 + 4Rr$ и $abc = 4SR$ забелязваме, че страните на $\triangle ABC$ са корени на кубичното уравнение

$$x^3 - \frac{2S}{r}x^2 + (R^2 + Rr + r^2)x - \sqrt{Rr(R+r)} = 0.$$

Оттук $x_1 = R\sqrt{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}[(R+2r)\sqrt{3} + \sqrt{(R-2r)(3R+2r)}]$ и

$x_3 = \frac{1}{2}[(R+2r)\sqrt{3} - \sqrt{(R-2r)(3R+2r)}]$. С това са намерени страните на $\triangle ABC$.