

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2013

Задача 1. Да се намерят всички наредени тройки от реални числа (x, y, z) , за които са изпълнени неравенствата:

$$\begin{cases} 2^x + 2^{y+1} + 2^{z+2} \leq 28, \\ x + y + z \geq 6, \\ y + 3z \geq 8. \end{cases}$$

Даниела Белдеа, Баилеш, Румъния

Решение: От неравенството между средното аритметично и средното геометрично намираме $28 \geq 2^x + 2^y + 2^y + 2^z + 2^z + 2^z + 2^z \geq 7 \cdot \sqrt[7]{2^{x+2y+4z}} = 7 \cdot \sqrt[7]{2^{x+y+z} \cdot 2^{y+3z}} \geq 7 \cdot \sqrt[7]{2^6 \cdot 2^8} = 7 \cdot 2^2 = 28$. Следователно $2^x = 2^y = 2^z$, т.е. $x = y = z$. Така от второто (или третото) неравенство получаваме $3x \geq 6$, т.е. $x \geq 2$. От първото неравенство следва $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} \leq 28$, което води до $2^x \leq 2^2$, т.е. $x \leq 2$. Следователно $x = y = z = 2$.

Задача 2. Да се построи триъгълник ABC , описан около окръжност с радиус r , така че страните му BC , AB и AC да образуват в този ред аритметична прогресия с разлика d , където r и d са дадени отсечки.

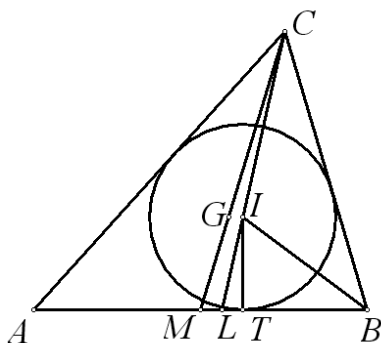
Христо Лесов, Казанлък

Решение: Нека G е медицентърът на ABC , M е средата на AB и I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. От свойството на ъглополовящата BI в $\triangle BCL$ следва $\frac{CI}{LI} = \frac{BC}{BL}$, а от свойството на ъглополовящата CL в $\triangle ABC$ следва $\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC}$.

Тези равенства, посредством следствията от второто $\frac{AL+BL}{BL} = \frac{AC+BC}{BC}$ и $\frac{AB}{BL} = \frac{AC+BC}{BC}$,

водят до $\frac{BC}{BL} = \frac{AC+BC}{BC} = \frac{CI}{LI}$. Тъй като BC , AB

и AC образуват в този ред аритметична прогресия, то $AC + BC = 2AB$. Затова от предишните равенства получаваме $BL = \frac{BC}{2}$ и $\frac{CI}{LI} = 2 = \frac{CG}{MG}$. Следователно



$GI \parallel ML$ и $\frac{GI}{ML} = \frac{CG}{CM} = \frac{2}{3}$, т.е. $GI = \frac{2}{3}ML$. Сега от $ML = BM - BL = \frac{AB - BC}{2} = \frac{d}{2}$ следва $GI = \frac{d}{3}$. Ако T е допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, то $IT = r$, $BT = \frac{BC - AC + AB}{2}$ и $TM = BM - BT = \frac{AC - BC}{2} = d$.

От тези резултати виждаме, че желаното построение може да се извърши по следния начин: 1) Построяваме отсечката $GI = \frac{d}{3}$; 2) Построяваме $IT \perp GI$, $IT = r$ и правата l през T , перпендикулярна на IT ; 3) Върху l по посока на $\overrightarrow{IG}$ нанасяме отсечка $TM = d$; 4) Построяваме правата MG , а след това върху нея – точка C , за която $\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{MG}$ – така се определя върхът C ; 4) Построяваме окръжност с център I и радиус $IT = r$, а след това допирателните през C към тази окръжност. Тези допирателни пресичат l в точките A и B . Триъгълникът ABC е търсеният.

Задача 3. Нека O и H са центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълен триъгълник ABC , за който $\sphericalangle ACB = \gamma$. Ако M и N са такива точки съответно върху страните AC и BC , за които $\sphericalangle MHN = \gamma$, да се докаже, че:

а) ортогоналните проекции P и Q съответно на точките O и H върху правата MN лежат на Ойлеровата окръжност на $\triangle ABC$;

б) $\sphericalangle MON = 180^\circ - 2\gamma$.

Хаим Хаимов, Варна

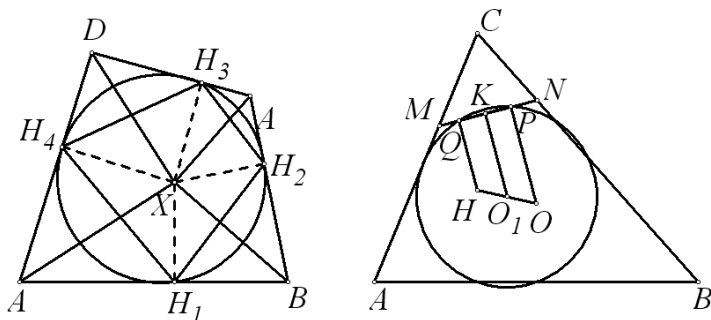
Решение: В решението ще използваме следната:

Лема. Нека X е произволна точка в изпъкналия четириъгълник $ABCD$, а H_1, H_2, H_3 и H_4 са ортогоналните проекции на X съответно върху AB, BC, CD и DA . Точките H_1, H_2, H_3 и H_4 лежат на една окръжност тогава и само тогава, когато $\sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD = 180^\circ$.

Доказателство. Тъй като четириъгълниците $AH_1XH_4, H_4XH_3D, H_3XH_2C$ и H_1BH_2X са вписани, то $\sphericalangle H_4H_1X = \sphericalangle H_4AX$, $\sphericalangle H_2H_1X = \sphericalangle H_2BX$, $\sphericalangle H_4H_3X = \sphericalangle H_4DX$ и $\sphericalangle H_2H_3X = \sphericalangle H_2CX$. Оттук следва

$$\begin{aligned} \sphericalangle H_4H_1H_2 + \sphericalangle H_4H_3H_2 &= (\sphericalangle H_4H_1X + \sphericalangle H_2H_1X) + (\sphericalangle H_4H_3X + \sphericalangle H_2H_3X) = \\ &= (\sphericalangle H_4AX + \sphericalangle H_2BX) + (\sphericalangle H_4DX + \sphericalangle H_2CX) = (\sphericalangle H_4AX + \sphericalangle H_4DX) + (\sphericalangle H_2BX + \sphericalangle H_2CX) = \\ &= (180^\circ - \sphericalangle AXD) + (180^\circ - \sphericalangle BXD) = \sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD. \end{aligned}$$

Следователно $\angle H_4 H_1 H_2 + \angle H_4 H_3 H_2 = 180^\circ$ е еквивалентно с $\angle AXB + \angle CXD = 180^\circ$.
С това лемата е доказана.



Преминаваме към решаване на задачата.

а) От условието имаме $\angle AHB = 180^\circ - \gamma$ и затова $\angle AHB + \angle MHN = 180^\circ$. Според лемата можем да заключим, че проекциите на H върху страните на четириъгълника $ABNM$ лежат на една окръжност. Но това е Ойлеровата окръжност k на $\triangle ABC$, защото съдържа петите на височините му. Следователно $Q \in k$. Центърът O_1 на k е средата на OH . Затова, ако K е средата на PQ , то O_1K е средна основа в трапеца $OHQP$, което означава, че $O_1K \perp PQ$. Оттук следва, че $O_1P = O_1Q$ и затова $P \in k$.

б) От $P \in k$ следва, че проекциите на точката O върху страните на четириъгълника $ABNM$ лежат върху окръжността k . Според лемата можем да заключим, че $\angle AOB + \angle MON = 180^\circ$, т.е. $\angle MON = 180^\circ - 2\gamma$. С това задачата е решена.