

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2012

Задача 1. Да се намерят всички положителни числа x, y и z , за които е изпълнено равенството $x^3 + 2y^3 + 3z^3 = 2011$.

Сава Гроздев, София, Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: Тъй като $13^3 = 2197$, $2 \cdot 11^3 = 2662$ и $3 \cdot 9^3 = 2187$, то $x \leq 12$, $y \leq 10$ и $z \leq 8$. Освен това x и z имат различна четност. Така с непосредствена проверка се вижда, че когато $z = 1, 3, 5, 7$ при $x = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ и $z = 2, 4, 6, 8$ при $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$, само $x = 2, y = 10, z = 1$ е решение на даденото уравнение.

Задача 2. В изпъкналият четириъгълник $ABCD$ средите на диагоналите AC и BD са съответно E и F , а продълженията на страните AD и BC се пресичат в точка U (D лежи между A и U). Ако $M = UE \cap AB$, $N = UF \cap AB$, $P = UF \cap CD$ и $Q = UE \cap CD$, да се докаже, че: а) $\frac{AM}{BM} = \frac{CP}{DP}$; б) $MP \parallel AD$ и $NQ \parallel BC$.

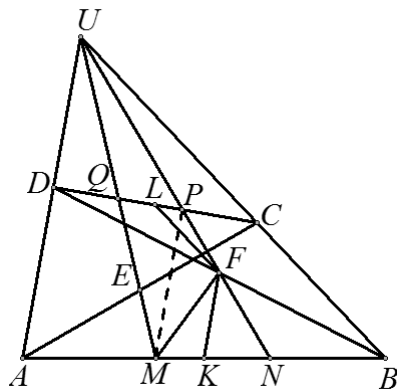
Хаим Хаимов, Варна

Решение: а) От теоремата на Менелай за $\triangle ABC$ и правата UM получаваме $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BU}{CU} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$. По същата теорема за $\triangle BCD$ и правата UP получаваме $\frac{CP}{DP} \cdot \frac{DU}{BU} \cdot \frac{BF}{CF} = 1$. След приравняване на левите части на последните две равенства, като

използваме, че по условие $\frac{CE}{AE} = \frac{DF}{BF} = 1$,

стигаме до желаното равенство $\frac{AM}{BM} = \frac{CP}{DP}$.

б) Нека K и L са средите съответно на AB и CD . По доказаното в а) е изпълнено $\frac{BM}{AM} = \frac{DP}{CP} = k$. Тогава $BM = k \cdot AM$, откъдето $AM = \frac{AB}{k+1}$ и $KM = AK - AM = \frac{k-1}{2(k+1)} \cdot AB$.



От последните две равенства след почленно деление се получава $\frac{KM}{AM} = \frac{k-1}{2}$.

Аналогично от равенството $DP=k \cdot CP$ следва $\frac{LP}{CP} = \frac{k-1}{2}$. Следователно $\frac{KM}{AM} = \frac{LP}{CP}$.

От друга страна, тъй като (FL е средна отсечка в $\triangle BCD$), по теоремата на Талес получаваме $\frac{LP}{CP} = \frac{FP}{UP}$. Затова $\frac{KM}{AM} = \frac{FP}{UP}$. Освен това (FK е средна отсечка в $\triangle ABD$), което означава, че $AKFU$ е трапец. В него отсечката MP дели бедрата AK и UP в едно и също отношение и следователно е успоредна на основите му. В частност $MP \parallel AU$, т.е. $MP \parallel AD$. Аналогично се показва, че $NQ \parallel BC$.

Задача 3. В триъгълник ABC е вписано конично сечение k , допиращо се до AB и BC съответно в точки P и Q . Ако R е допирната точка на k и AC , а q произволна права през Q , пресичаща PR в точка M и k в точка Q' , да се построят с линейка и пергел точката R и хармонично спрегнатата точка X на M спрямо двойката пресечни точки Q и Q' на q и k .

Асен Симеонов, Своге

Решение: 1) Ако $AQ \cap CP = O$, то според теоремата на Брианшон точката R е сечението на правите BO и AC . 2) Прилагаме теоремата на Паскал за точките $RRPPQQ'$: $RR = AC \cap PQ = 1'$, $RP \cap QQ' = 2' = M$, $PP = AB \cap 1'2' = 3'$ – точките $1'$, $2'$ и $3'$ са колинеарни. Точката Q' се построява като сечение на $3'R$ и q . 3) Точките M , $N = RQ' \cap PQ$ и $L = PQ' \cap RQ$ са диагонални за четириъгълника $PQRQ'$ и затова NL е поляра на M . Следователно търсената точка X се построява като сечение на q с NL .

