

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 4, 2019

Задача 1. Да се реши уравнението

$$2 \sin(2019\pi x) + 2 \cos(2019\pi x) = \sqrt{2x(2x-3)+10}, 25.$$

Христо Лесов, Казанлък

Решение: тъй като $2x(2x-3)+10,25 = (2x-1,5)^2 + 8 \geq 8$, то $\sqrt{2x(2x-3)+10},25 \geq 2\sqrt{2}$, като равенство се достига само когато $2x-1,5 = 0$, т.е. когато $x = \frac{3}{4}$.

Нека $y = 2019\pi x$. От равенството $2(\sin y + \cos y) = 2\sqrt{2} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$ следва, че $2(\sin y + \cos y) \leq 2\sqrt{2}$, като равенство се достига само когато $\cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

От двете неравенства следва, че даденото уравнение има решение само когато двете му страни са равни на $2\sqrt{2}$. В дясната страна тази стойност се достига, когато $x = \frac{3}{4}$. Затова в лявата страна тя се достига точно когато

$$\cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2019\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2019\pi \cdot \frac{3}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(1514\pi) = \cos(757.2\pi) = 1.$$

Следователно уравнението има само един корен $x = \frac{3}{4}$.

Задача 2. Да се докаже, че в четириъгълник $ABCD$ с перпендикулярни диагонали съществува точка O , за която са изпълнени равенствата

$$\sphericalangle OBA = \sphericalangle DBC, \sphericalangle OCB = \sphericalangle ACD, \sphericalangle ODA = \sphericalangle BDC, \sphericalangle OAB = \sphericalangle CAD.$$

Хаим Хаимов, Варна

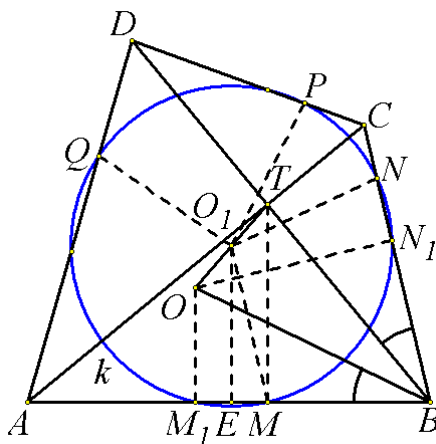
Решение: означаваме пресечната точка на диагоналите AC и BD с T , ортогоналните ѝ проекции върху AB , BC , CD и DA съответно с M , N , P

и Q . Ще докажем, че четириъгълникът $MNPQ$ е вписан в окръжност k . Тъй като четириъгълниците $AMTQ$, $BNTM$, $CPTN$ и $DQTP$ са вписани, то $\sphericalangle QMT = \sphericalangle QAT$, $\sphericalangle NMT = \sphericalangle NBT$, $\sphericalangle NPT = \sphericalangle NCT$ и $\sphericalangle QPT = \sphericalangle QDT$.

С помощта на тези равенства получаваме последователно

$$\begin{aligned}\sphericalangle QMN + \sphericalangle QPN &= (\sphericalangle QMT + \sphericalangle NMT) + (\sphericalangle QPT + \sphericalangle NPT) = \\ &= (\sphericalangle QAT + \sphericalangle NBT) + (\sphericalangle QDT + \sphericalangle NCT) = \\ &= (\sphericalangle QAT + \sphericalangle QDT) + (\sphericalangle NBT + \sphericalangle NCT) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.\end{aligned}$$

Следователно точките M , N , P и Q лежат на една окръжност k .



Нека O_1 е центърът на k , а O е точката, симетрична на T спрямо O_1 . Ще докажем, точката O удовлетворява желаните свойства, описани в условието на задачата. Нека M_1 и N_1 са ортогоналните проекции на O съответно върху правите AB и BC , а E е средата на отсечката M_1M . Тъй като O_1E е средна основа в трапеца M_1OTM , то $O_1E \perp MM_1$ и затова O_1E е симетрала на MM_1 . Следователно $O_1M_1 = O_1M$, което означава, че $M_1 \in k$. Аналогично се показва, че $N_1 \in k$. Сега получаваме, че $\sphericalangle MM_1N_1 = \sphericalangle MNN_1$ (като вписани в k ъгли). По-нататък от вписаните четириъгълници M_1BN_1O и $MTNB$ получаваме съответно $\sphericalangle MM_1N_1 = \sphericalangle BM_1N_1 = \sphericalangle BON_1$ и $\sphericalangle MNN_1 = \sphericalangle MTB$. От последните три равенства следва, че $\sphericalangle BON_1 = \sphericalangle MTB$. Но $\sphericalangle OBC = 90^\circ - \sphericalangle BON_1$ и $\sphericalangle DBA = 90^\circ - \sphericalangle MTB$. Следователно $\sphericalangle OBC = \sphericalangle DBA$. Оттук имаме $\sphericalangle OBA = \sphericalangle ABC - \sphericalangle OBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle DBA = \sphericalangle DBC$, т.е. $\sphericalangle OBA = \sphericalangle DBC$. С това е доказано първото равенство на задачата. Останалите три равенства се доказват аналогично.

Задача 3. В правилен 13-ъгълник по произволен начин са избрани два диагонала. Каква е вероятността избраните диагонали да не се пресичат?

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: ще определим броя на непресичащите се диагонали в произволен изпъкнал n -ъгълник при $n \geq 5$. От всеки връх на n -ъгълника излизат $n - 3$ диагонала. Затова общият брой диагонали N на n -ъгълника е $N = \frac{n(n-3)}{2}$. Следователно броят на всички двойки диагонали в n -ъгълника е

$D = C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2} = \frac{n(n-3)(n^2-3n-2)}{8}$. Сега ще определим броя

D_1 на всички двойки диагонали, които се пресичат. На всяка такава двойка диагонали съответстват четири върха – върховете, които са краища на тези диагонали. Обратно, на всяка четворка върхове на n -ъгълника съответства единствена двойка пресичащи се диагонали. Следователно броят на двойките пресичащи се диагонали е равен на броя на ненаредените четворки върхове на n -ъгълника. Така получаваме $D_1 = C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$. Ос-

тава да определим броя D_2 на двойките диагонали, излизащи от върховете на n -ъгълника. От всеки връх излизат C_{n-3}^2 двойки диагонали. Следователно

$D_2 = nC_{n-3}^2 = \frac{n(n-3)(n-4)}{2}$. Сега за броя D_0 на двойките непресичащи се диагонали получаваме $D_0 = D - D_1 - D_2 = \frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}$. Следова-

телно вероятността да се избере двойка непресичащи се диагонали, е равна на $\frac{D_0}{D} = \frac{2(n-4)(n-5)}{3(n^2-3n-2)}$. При $n = 13$ търсената вероятност е $\frac{3}{8}$.