

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 4, 2018

Задача 1. Да се намерят всички тройки естествени числа (x, y, z) , за които е изпълнено равенството:

а) $x^2 + y^3 + z^4 = 2018$; б) $x^2 + y^4 + z^6 = 2018$; в) $x^2 + y^6 + z^8 = 2018$.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: а) Тъй като $x \geq 1$, $y \geq 1$ и $z \geq 1$, то $1^2 + 1^3 + z^4 = x^2 + y^3 + z^4 = 2018$. Оттук $z^4 \leq 2016 < 2401 = 7^4$ и затова $z \leq 6$. Разглеждаме шестте възможни случая по-отделно.

а1) При $z = 6$ имаме $x^2 + y^3 = 722$ и $1^2 + y^3 \leq x^2 + y^3 = 722$. Следователно $y^3 \leq 721 < 729 = 9^3$ и $y \leq 8$. С непосредствена проверка се установява, че при $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ няма естествени числа x , удовлетворяващи $x^2 + y^3 = 722$.

а2) При $z = 5$ имаме $x^2 + y^3 = 1393$ и $1^2 + y^3 \leq x^2 + y^3 = 1393$. Следователно $y^3 \leq 1392 < 1728 = 12^3$ и $y \leq 11$. С непосредствена проверка се установява, че при $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ няма естествени числа x , удовлетворяващи $x^2 + y^3 = 1393$.

а3) При $z = 4$ имаме $x^2 + y^3 = 1762$ и $1^2 + y^3 \leq x^2 + y^3 = 1762$. Следователно $y^3 \leq 1761 < 2197 = 13^3$ и $y \leq 12$. С непосредствена проверка се установява, че при $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ няма естествени числа x , удовлетворяващи $x^2 + y^3 = 1762$.

а4) При $z = 3$ имаме $x^2 + y^3 = 1937$ и $1^2 + y^3 \leq x^2 + y^3 = 1937$. Следователно $y^3 \leq 1936 < 2197 = 13^3$ и $y \leq 12$. С непосредствена проверка се установява, че при $y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ няма естествени числа x , удовлетворяващи $x^2 + y^3 = 1762$. При $y = 1$ това уравнение се удовлетворява от $x = 44$. Така в този случай получаваме решението $x = 44$, $y = 1$, $z = 3$.

а5) При $z = 2$ имаме $x^2 + y^3 = 2002$ и $1^2 + y^3 \leq x^2 + y^3 = 2002$. Следователно $y^3 \leq 2001 < 2197 = 13^3$ и $y \leq 12$. С непосредствена проверка се установява, че при $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ няма естествени числа x , удовлетворяващи $x^2 + y^3 = 2002$.

аб) При $z=1$ имаме $x^2 + y^3 = 2017$ и $1^2 + y^3 \leq x^2 + y^3 = 2017$. Следователно $y^3 \leq 2016 < 2197 = 13^3$ и $y \leq 12$. С непосредствена проверка се установява, че при $y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ няма естествени числа x , удовлетворяващи $x^2 + y^3 = 2017$. При $y=12$ това уравнение се удовлетворява от $x=17$. Така в този случай получаваме решението $x=17$, $y=12$, $z=1$.

Следователно всички тройки (x, y, z) от естествени числа, удовлетворяващи уравнението $x^2 + y^3 + z^4 = 2018$, са следните: $(17, 12, 1)$ и $(44, 1, 3)$.

б) Уравнението $x^2 + y^4 + z^6 = 2018$ се получава от а) при $y=z^2$ и $z=y$. Затова имаме следните възможности: б1) $x=17$, $y=1$, $z^2=12$, което не води до решение на уравнението; б2) $x=44$, $y=3$, $z^2=1$, което води до решението $x=44$, $y=3$, $z=1$. Следователно единствено тройката $(44, 1, 3)$ е решение в естествени числа на уравнението $x^2 + y^4 + z^6 = 2018$.

в) Уравнението $x^2 + y^6 + z^8 = 2018$ се получава от б) при $y=z^2$ и $z=y$. Затова имаме $x=44$, $y=1$, $z^2=3$, което не води до решение на уравнението. Следователно уравнението $x^2 + y^6 + z^8 = 2018$ няма решение в естествени числа.

Задача 2. Да се намерят всички триъгълници с целочислени страни, лицата на които са два пъти по-големи от съответните им обиколки.

Милен Найденов, Варна

Решение: с a , b , c означаваме страните на произволен триъгълник, с S – лицето му. От Хероновата формула и условието имаме

$$4p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ където } p = \frac{a+b+c}{2}. \text{ Оттук следва равенството } 16p = (p-a)(p-b)(p-c).$$

След като положим $x=p-a$, $y=p-b$ и $z=p-c$, последното равенство преминава в Диофантовото уравнение $16(x+y+z) = xyz$. Тъй като няма значения как са означени страните на даден триъгълник, няма да е ограничение, ако предполагаме, че в последното уравнение са изпълнени неравенствата $x \geq y \geq z$. В началото да предположим, че $z \geq 8$. Тогава от равенството $z = \frac{16(x+y)}{xy-16}$ следва

$$(x-2)(y-2) \leq 20. \text{ Тъй като } x \geq z \geq 8, \text{ това неравенство се удовлетворява}$$

само при $20 \geq x - 2 \geq 6$. Тогава същото неравенство се удовлетворява само при $1 \leq y \leq 3$. Но по предположение $y \geq z \geq 8$. Следователно разглежданото Диофантово уравнение при наложените ограничения $x \geq y \geq z$ няма решение, когато $z \geq 8$. Следователно са възможни седем случая.

1) Ако $z = 1$, имаме $x = 16 + \frac{16.17}{y-16}$. Естествени стойности за x се получават само когато $y - 16 = 1, 2, 4, 8, 16, 17, 2.17, 4.17, 8.17, 16.17$, т.е. $y = 17, 18, 20, 24, 32, 33, 50, 84, 152, 288$. При тези стойности на y съответните стойности на x са следните $x = 288, 152, 84, 50, 33, 32, 24, 20, 18, 17$. Тъй като $x \geq y$, оттук следва, че наредените тройки (x, y, z) , които са решения на Диофантовото уравнение в този случай, са следните: $(288, 17, 1)$, $(152, 18, 1)$, $(84, 20, 1)$, $(50, 24, 1)$, $(33, 32, 1)$.

2) Ако $z = 2$, имаме $x = 8 + \frac{80}{y-8}$. Естествени стойности за x се получават само когато $y - 8 = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80$, т.е. $9, 10, 12, 13, 16, 18, 24, 28, 48, 88$. При тези стойности на y съответните стойности на x са следните $x = 88, 48, 28, 24, 18, 16, 13, 12, 10, 9$. Тъй като $x \geq y$, оттук следва, че наредените тройки (x, y, z) , които са решения на Диофантовото уравнение в този случай, са следните: $(88, 9, 2)$, $(48, 10, 2)$, $(28, 12, 2)$, $(24, 13, 2)$, $(18, 16, 2)$.

3) Ако $z = 3$, имаме $x = 5 + \frac{y+128}{3y-16}$. Следователно $\frac{y+128}{3y-16} \geq 1$. Оттук следва, че y удовлетворява неравенството $(3y-16)(y-72) \leq 0$, т.е. $\frac{16}{3} < y \leq 10$. Следователно y е цяло число от затворения интервал $[6, 72]$.

Само при $y_1 = 6$, $y_2 = 7$, $y_3 = 8$, $y_4 = 12$, $y_5 = 22$, $y_6 = 32$ и $y_7 = 72$ се получават естествени стойности за x , които са съответно $x_1 = 72$, $x_2 = 32$, $x_3 = 22$, $x_4 = 12$, $x_5 = 8$, $x_6 = 7$, $x_7 = 6$. Тъй като $x \geq y$, оттук следва, че наредените тройки (x, y, z) , които са решения на Диофантовото уравнение в този случай, са следните: $(72, 6, 3)$, $(32, 7, 3)$, $(22, 8, 3)$, $(12, 12, 3)$.

4) Ако $z = 4$, имаме $x = 4 + \frac{32}{y-4}$. Естествени стойности за x се получават само когато $y - 4 = 1, 2, 4, 8, 16, 32$, т.е. $y = 5, 6, 8, 12, 20, 36$. При тези стойности на y съответните стойности на x са следните: $x = 36, 20, 12, 8, 4, 2, 1$. Тъй като $x \geq y$, оттук следва, че наредените тройки (x, y, z) , които са ре-

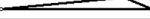
шения на Диофантовото уравнение в този случай, са следните: $(36, 5, 4)$, $(20, 6, 4)$, $(12, 8, 4)$.

5) Ако $z = 5$, имаме $x = 3 + \frac{y+128}{5y-16}$. Следователно $\frac{y+128}{5y-16} \geq 1$. Оттук следва, че y удовлетворява неравенството $(5y-16)(y-36) \leq 0$, т.е. $\frac{16}{5} < y \leq 36$. Като вземем предвид, че $y \geq z = 5$, стигаме до извода, че y е цяло число от затворения интервал $[5, 36]$. Само при $y = 36$ се получава естествена стойност за x , която $x = 4$. Тъй като $x \geq y$, оттук следва, че при $z = 5$ не се получават нови решения на Диофантовото уравнение.

6) Ако $z = 6$, имаме $x = 2 + \frac{2y+64}{3y-8}$. Следователно $\frac{2y+64}{3y-8} \geq 1$. Оттук следва, че y удовлетворява неравенството $(3y-8)(y-72) \leq 0$, т.е. $\frac{8}{3} < y \leq 72$. Като вземем предвид, че $y \geq z = 6$, стигаме до извода, че y е цяло число от затворения интервал $[6, 72]$. Само при $y_1 = 7$, $y_2 = 8$ и $y_3 = 72$ се получават естествени стойности за x , които са съответно $x_1 = 8$, $x_2 = 7$ и $x_3 = 3$. Тъй като $x \geq y$, оттук следва, че единствената наредена тройка (x, y, z) , която е решение на Диофантовото уравнение в този случай, е следната: $(8, 7, 6)$.

7) Ако $z = 7$, имаме $x = 2 + \frac{2y+144}{7y-16}$. Следователно $\frac{2y+144}{7y-16} \geq 1$. Оттук следва, че y удовлетворява неравенството $(7y-16)(y-32) \leq 0$, т.е. $\frac{16}{7} < y \leq 32$. Като вземем предвид, че $y \geq z = 7$, стигаме до извода, че y е цяло число от затворения интервал $[7, 32]$. Само при $y_1 = 8$ и $y_2 = 32$ се получават естествени стойности за x , които са съответно $x_1 = 6$ и $x_2 = 3$. Тъй като $x \geq y$ (или $x \geq z = 7$), при $z = 7$ не се получават нови решения на Диофантовото уравнение.

От направения изследвания стигаме до извода, че има точно осемнадесет триъгълника, удовлетворяващи условието на задачата. Тези решения се получават чрез равенствата $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$. Решенията са систематизирани в следващата таблица:

№	x	y	z	a	b	c	S	Вид на триъгълника
1	288	17	1	18	289	305	1224	
2	152	18	1	19	153	170	684	
3	84	20	1	21	85	104	420	
4	50	24	1	25	51	74	300	
5	33	32	1	33	34	65	264	
6	88	9	2	11	90	97	396	
7	48	10	2	12	50	58	240	
8	28	12	2	14	30	40	168	
9	24	13	2	15	26	37	156	
10	18	16	2	18	20	34	144	
11	72	6	3	9	75	78	324	
12	32	7	3	10	35	39	168	
13	22	8	3	11	25	30	132	
14	12	12	3	15	15	24	108	
15	36	5	4	9	40	41	180	
16	20	6	4	10	24	26	120	
17	12	8	4	12	16	20	96	
18	8	7	6	13	14	15	84	

От получените резултати се забелязва, че съществуват само един равнобедрен триъгълник и само един остроъгълен триъгълник, които са решения на поставената задача.

Задача 3. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ средите на страните AB , BC и DA са съответно M , N и P , а l е ъглополовящата на $\sphericalangle BCD$. Да се докаже, че ако O_1 и O_2 са центровете на описаните съответно около триъгълниците ADC и DAB окръжности, $\sphericalangle MPN = 90^\circ - \sphericalangle DAC$ и $\sphericalangle MNP = \frac{1}{2} \sphericalangle BCD$, то правите DO_1 , AO_2 и l се пресичат в една точка.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: означаваме пресечната точка на диагоналите AC и BD с T , а втората пресечна точка на описаните около триъгълниците ABT и CDT – с K .

Ще докажем, че правите DO_1 , AO_2 и l се пресичат в точката K . Затова е достатъчно да докажем, че $O_1 \in DK$, $O_2 \in AK$ и $\sphericalangle KID = \frac{1}{2} \sphericalangle BCD$. Първо ще покажем, че $\triangle KAB \sim \triangle KCD \sim \triangle MNP$. От свойствата на вписаните ъгли имаме $\sphericalangle KDB = \sphericalangle KDT = \sphericalangle KCT = \sphericalangle KCA$. Аналогично се вижда, че

$\sphericalangle KAC = \sphericalangle KBD$. Затова $\triangle KDB \sim \triangle KCA$. Оттук следва, че $\frac{DK}{CK} = \frac{BK}{AK} = \frac{BD}{AC}$.

От друга страна, $\sphericalangle DKC = \sphericalangle DTC = \sphericalangle ATB = \sphericalangle AKB$. Така получаваме,

че $\triangle KAB \sim \triangle KCD$. Освен това имаме равенството $\frac{PM}{MN} = \frac{\frac{1}{2}BD}{\frac{1}{2}AC} = \frac{DK}{CK}$,

а от $PM \parallel BD$ и $MN \parallel AC$ следва $\sphericalangle PMN = \sphericalangle DTC = \sphericalangle DKC$. Ето защо $\triangle MNP \sim \triangle KCD$. От последното подобие и условието на задачата получаваме $\sphericalangle KDC = \sphericalangle MPN = 90^\circ - \sphericalangle DAC$. Но $\sphericalangle O_1DC = 90^\circ - \sphericalangle DAC$ и затова $\sphericalangle O_1DC = \sphericalangle KDC$. Следователно точките K и O_1 лежат на права, минаваща през D , т.е. $O_1 \in DK$. От друга страна, като вземем предвид, че $\triangle KAB \sim \triangle MNP$, имаме равенството $\sphericalangle KAB = \sphericalangle MNP = 180^\circ - \sphericalangle MPN - \sphericalangle PMN$. Сега от условието $\sphericalangle MPN = 90^\circ - \sphericalangle DAC$ и полученото равенство $\sphericalangle PMN = \sphericalangle DTC$ следва $\sphericalangle KAB = 180^\circ - (90^\circ - \sphericalangle DAC) - \sphericalangle DTC = 90^\circ - \sphericalangle ADB$. Тъй като и $\sphericalangle O_2AB = 90^\circ - \sphericalangle ADB$, то $\sphericalangle KAB = \sphericalangle O_2AB$. Следователно правата AO_2 минава през K . Накрая от $\triangle KCD \sim \triangle MNP$ имаме $\sphericalangle KCD = \sphericalangle MNP = \frac{1}{2}\sphericalangle BCD$,

което означава, че ъглополовящата l също минава през K . С това е доказано, че правите DO_1 , AO_2 и l се пресичат в една точка.

