

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 4, 2017 Г.

Задача 1. От две селища A и B , разстоянието между които е S km, едновременно тръгнали един срещу друг автомобил и мотоциклет. В момента на срещата им от B за A тръгнал втори мотоциклет. При срещата на втория мотоциклет с автомобила се оказало, че разстоянието между местата на първата и втората среща е $\frac{2}{9}S$. Ако автомобилът се движи с 20 km/h по-бавно, то той ще срещне първия мотоциклет 3 h след тръгването си, а разстоянието между местата на двете срещи ще бъде 30 km. Определете разстоянието S , ако скоростите на двата мотоциклета са равни и не надвишават скоростта на автомобила.

Румяна Несторова, Враца

Решение. С и y означаваме скоростите съответно на автомобила и мотоциклетите. От условието следва, че $x > 20$ и $y \leq x$. Въвеждаме още означения: t_1 – времето, което се е движил автомобилът до първата среща; t_2 – времето, което се е движил автомобилът от първата среща до втората със скорост x km/h; t_3 – времето, което би се е движил автомобилът от първата среща до втората със скорост $x - 20$ km/h. Условиата на задачата се записват със следните уравнения:

$$(1) \quad (x + y).t_1 = S,$$

$$(2) \quad x.(t_1 + t_2) + y.t_2 = S,$$

$$(3) \quad x.t_2 = \frac{2}{9}.S,$$

$$(4) \quad (x - 20 + y).3 = S,$$

$$(5) \quad (x - 20).(3 + t_3) + y.t_3 = S,$$

$$(6) \quad (x - 20).t_3 = 30.$$

От (1) и (3) изразяваме $t_1 = \frac{S}{x+y}$ и $t_2 = \frac{2S}{9x}$, които заместваме в (2) и получаваме $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$. Последното равенство записваме във вида $2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x}{y} + 2 = 0$. Оттук следва, че $\frac{x}{y} = 2$ или $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$. Тъй като $y \leq x$, то $x = 2y$. Чрез това равенство и (4), (5), (6) получаваме уравнението $y^2 - 25y + 100 = 0$. Неговите решения са $y = 5$ и $y = 20$. Тъй като $x = 2y > 20$, то $y = 20 \text{ km/h}$ и $x = 40 \text{ km/h}$. Сега от (4) следва, че $S = 120 \text{ km}$.

Задача 2. През точка P от страната AB на триъгълник ABC са построени прави, успоредни на AC и BC , които пресичат страните BC и AC съответно в точки M и N .

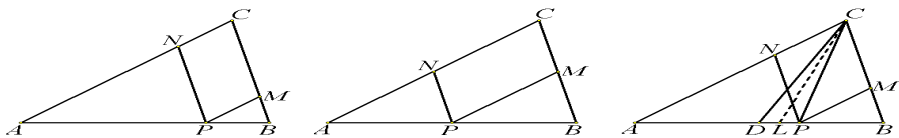
а) Да се докаже, че при $AC \geq BC$ за периметъра P_1 на четириъгълника $CMPN$ са изпълнени неравенствата $2 \cdot BC \leq P_1 \leq 2 \cdot AC$. Кога се достига равенство?

б) Да се определи положението на точката P , при което лицето на четириъгълника $CMPN$ е най-голямо.

в) Да се определи положението на точката P , при което сборът от квадратите на страните на четириъгълника $CMPN$ е най-малък.

Христо Лесов, Казанлък

Решение. Въвеждаме означенията: $BC = a$, $AC = b$, $PN = CM = x$, $PM = CN = y$ и $\angle ACB = \gamma$. От подобните триъгълници APN и ABC имаме $\frac{x}{a} = \frac{AP}{AB}$, а от подобните триъгълници BPM и BAC следва равенството $\frac{y}{b} = \frac{BP}{AB}$. След почленно събиране на последните две равенства стигаме до зависимостта: (1) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, като $0 < x < a$ и $0 < y < b$.



а) От условието $b \geq a$ следва $\frac{x+y}{b} \leq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq \frac{x+y}{a}$. Сега от (1) се получава $\frac{x+y}{b} \leq 1 \leq \frac{x+y}{a}$. Оттук имаме $a \leq x+y \leq b$. Следователно за

$P_1 = 2(x + y)$ са изпълнени неравенствата $2a \leq P_1 \leq 2b$. Равенства се достигат само при $a = b$, т.е. при равнобедрен триъгълник ABC , за който $AC = BC$.

б) Лицето на успоредника $CMPN$ е $S_1 = x \cdot y \cdot \sin \gamma$. От (1) и неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме $1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{x \cdot y}{a \cdot b}}$. Оттук следва, че $x \cdot y \leq \frac{1}{4} a \cdot b$ и $S_1 \leq \frac{1}{4} a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} S_{ABC}$. Следователно най-голямото лице, което може да има $CMPN$, е равно на половината от лицето на $\triangle ABC$. То се достига, когато $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{2}$ или $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{BP}{AB}$, т.е. когато P , M и N са средите съответно на AB , BC и CA .

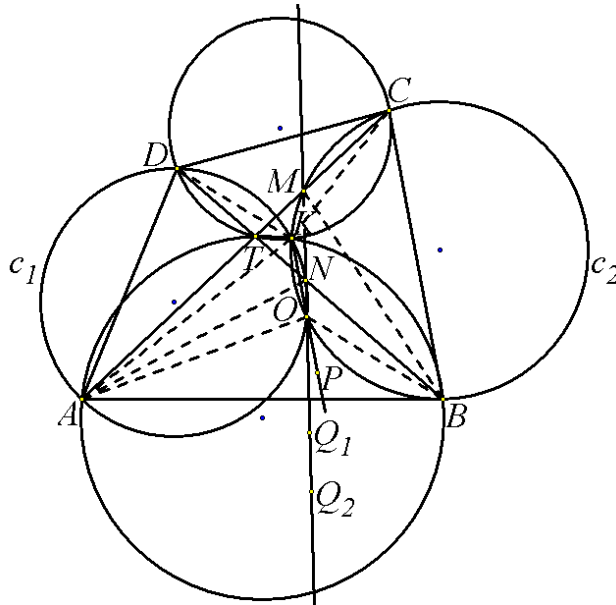
в) От (1) следва $y = b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Оттук $x^2 + y^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2 \cdot \frac{b^2}{a}x + b^2$. Известно е, че квадратната функция $m \cdot x^2 + n \cdot x + p$ ($m > 0$) приема най-малка стойност при $x = -\frac{m}{2n}$. Затова сборът от квадратите на страните на $CMPN$ е най-малък при $x = \frac{a \cdot b^2}{a^2 + b^2} < a$ и $y = \frac{a^2 \cdot b}{a^2 + b^2} < b$. Оттук $\frac{AP}{AB} = \frac{x}{a} = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$ и $\frac{BP}{AB} = \frac{y}{b} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$. Следователно $\frac{AP}{BP} = \frac{b^2}{a^2}$. Това означава, че CP е симедиана на $\triangle ABC$, т.е. CP е симетрична на медианата CD спрямо ъглополовящата CL на $\angle ACB$.

Задача 3. В изпъкналият четириъгълник $ABCD$ точката M лежи върху диагонала AC , така че $\angle ABM = \angle BDC$, а точката N лежи върху диагонала BD , така че $\angle BAN = \angle ACD$. Да се докаже, че една от общите точки на описаните окръжности c_1 и c_2 съответно за $\triangle ADN$ и $\triangle BCM$ лежи върху правата MN .

Хаим Хаимов, Варна

Решение. Нека T е пресечната точка на диагоналите AC и BD , а K е втората пресечна точка на описаните около триъгълниците ABT и CDT окръжности. Ще докажем, че K е една от пресечните точки на окръжностите c_1 и c_2 . Тъй като $\angle DCT = \angle BAN$, имаме $\angle AKD = \angle AKT + \angle DKT = \angle ABT + \angle DCT = \angle ABN + \angle BAN = \angle AND$.

Следователно $K \in c_1$. Аналогично се показва, че $K \in c_2$. Нека O е втората пресечна точка на c_1 и c_2 .



Ще докажем, че O лежи върху правата MN . Първо ще докажем, че $\angle AOB = \angle ADT + \angle BCT$. Нека P е точка от правата KO , лежаща в $\angle AOB$. Понеже $\angle TDK = \angle TCK$, то

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle AOP + \angle BOP = \angle ADK + \angle BCK = \\ &= (\angle ADT + \angle TDK) + (\angle BCT - \angle TCK) = \angle ADT + \angle BCT. \end{aligned}$$

Сега означаваме с Q_1 точка от правата NO , а с Q_2 точка от правата MO , така че точките Q_1 и Q_2 да лежат в $\angle AOB$. За да докажем, че точките M , N и O лежат на една права, е достатъчно да докажем, че Q_1 , Q_2 и O лежат на една права. От $\angle AOQ_1 = \angle ADN = \angle ADT$ и $\angle BOQ_2 = \angle BCM = \angle BCT$ следва, че

$$\angle AOQ_1 + \angle BOQ_2 = \angle ADT + \angle BCT = \angle AOB.$$

Така заключаваме, че точките Q_1 и Q_2 лежат на една права с O .