

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 4, 2014

Задача 1. Намерете цифрите a , b , c и d в десетична бройна система, ако е изпълнено равенството $\sqrt{abacab} = \overline{dab}$.

Йон Патралику, Крайова, Румъния

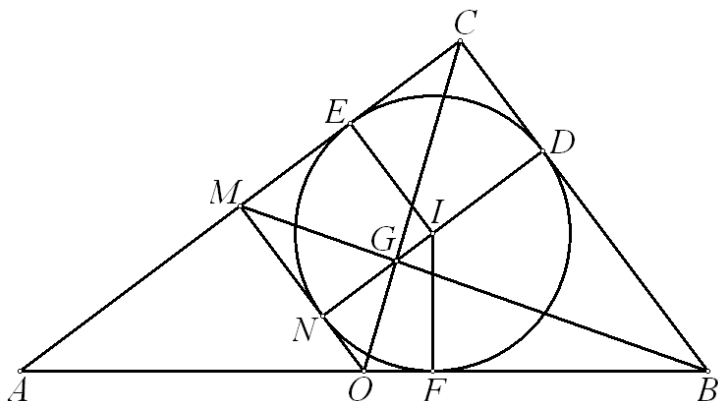
Решение: (гл. ас. д-р Ирина Вутова). Равенството $\sqrt{abacab} = \overline{dab}$ е еквивалентно с $\overline{abacab} = (\overline{dab})^2$. Ще направим анализ на задачата: (1) Цифрите a , b , c и d са две по две различни; (2) Цифрата a е различна от 0 (a е първа цифра в числото $\overline{abacab}$); (3) Единиците на числото $\overline{dab}$ и на неговия квадрат ($\overline{abacab}$) са равни (на b); (4) Единиците и десетиците на числото $\overline{dab}$ (b и a) са съответно равни на единиците и десетиците на неговия квадрат ($\overline{abacab}$); (5) Единиците и десетохилядите на числото $\overline{abacab}$ са равни (на b); (6) Десетиците, хилядите и стохилядите на числото $\overline{abacab}$ са равни (на a). Ще търсим решение на задачата чрез пълно изчерпване на всички случаи. От условие (3) следва, че $b \in \{0, 1, 5, 6\}$. Ще разгледаме всеки от тези случаи поотделно. 1) Ако $b = 0$, последните две цифри на числото $\overline{abacab}$ ще бъдат равни на нула, т.е. $a = b = 0$. Това обаче противоречи на условие (2). Следователно $b \neq 0$. 2) Ако $b = 1$, разглеждаме квадратите на всички двуцифрени числа, които имат последна цифра 1 (за които е изпълнено (1)), т.е. $21^2 = 441$, $31^2 = 961$, $41^2 = 1681$, $51^2 = 2601$, $61^2 = 3721$, $71^2 = 5041$, $81^2 = 6561$, $91^2 = 8281$. В тази редица от числа не съществува число, което удовлетворява условие (4). Следователно $b \neq 1$. 3) Ако $b = 5$, то последните две цифри на числото $(\overline{dab})^2$ са 2 и 5, което според (4) означава, че $a = 2$. Разглеждаме квадратите на всички трицифрени числа, последните две цифри на които са 2 и 5 (за които е изпълнено (1)), т.е. $125^2 = 15625$, $325^2 = 105625$, $425^2 = 180625$, $625^2 = 390625$, $725^2 = 525625$, $825^2 = 680625$, $925^2 = 855625$. В тази редица от числа не съществува число, което удовлетворява условие (6). Следователно $b \neq 5$. 4) Ако $b = 6$, разглеждаме квадратите на всички двуцифрени числа, които имат последна цифра 6 (за които е изпълнено (1)), т.е. $16^2 = 256$, $26^2 = 576$, $36^2 = 1296$, $46^2 = 2116$, $56^2 = 3136$, $76^2 = 5776$, $86^2 = 7396$, $96^2 = 9216$. В тази редица от числа само 76 удовлетворява условие (4). Следователно $a = 7$. Сега разглеждаме квадратите на всички

трицифрени числа, последните две цифри на които са 7 и 6 (за които е изпълнено (1)), т.е. $176^2 = 30976$, $276^2 = 76176$, $376^2 = 141376$, $476^2 = 226576$, $576^2 = 331776$, $876^2 = 767376$, $976^2 = 952756$. В тази редица от числа само 876 удовлетворява всички условия. Следователно $a = 7$, $b = 6$, $c = 3$ и $d = 8$.

Задача 2. В $\triangle ABC$ с медицентър G е вписана окръжност $k(I)$, допираща се до BC в точката D . Ако $\sphericalangle AIB = 135^\circ$, центърът I лежи върху отсечката DG , N е втората пресечна точка на правата DG с k и O е центърът на описаната за $\triangle ABC$ окръжност, да се определи каква част от лицето на $\triangle ABC$ са лицата на $\triangle OGI$ и четириъгълника $CION$.

Христо Лесов, Казанлък

Решение. Тъй като AI и BI са ъглополовящи на ъглите съответно при върховете A и B , то $\sphericalangle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$. От условието следва $90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 135^\circ$. Оттук получаваме, че $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ и затова центърът на описаната окръжност O е средата на AB . Ако M е средата на BC , то медицентърът G е пресечната точка на BM и CO . Освен това OM е средна отсечка, поради което $OM \parallel BC$, $OM \perp AC$ и $OM = \frac{1}{2}BC$. Означаваме с r радиуса на вписаната окръжност $k(I)$. По условие точките D , I , G и N лежат на диаметър на $k(I)$. Затова $ID \perp BC$, $DN \perp OM$, $ID = r$ и $DN = 2r$. Следователно N е допирна точка на OM с $k(I)$. Нека E и F са допирните точки на $k(I)$ съответно с AC и BC . Тогава $IE \perp AC$, $IF \perp AB$, $IE = IF = r$, а четириъгълниците $CDIE$ и $MNIE$ са квадрати със страна r . Оттук $AF = AE = AM + ME = 3r$. Нека $BF = BD = x$. От Питагоровата теорема за $\triangle ABC$ имаме $(x+r)^2 + (4r)^2 = (x+3r)^2$, което след пресмятания води до равенството $x = 2r$. Оттук намираме, че $BC = 3r$, $AC = 4r$ и $AB = 5r$, т.е. страните BC , AC и AB образуват аритметична прогресия с разлика r . От $IN \parallel CM$ следва, че $\frac{GN}{CM} = \frac{OG}{OC} = \frac{1}{3}$, откъдето $GN = \frac{1}{3}CM = \frac{2}{3}r$. Следователно $IG = IN - GN = \frac{r}{3}$ и $ON = OM - MN = \frac{r}{2}$. Оттук намираме $S_{OGI} = \frac{1}{2}IG \cdot ON = \frac{r^2}{12}$. Освен това $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 6r^2$. Следователно $S_{OIG} = \frac{1}{72}S_{ABC}$. Лицето на четириъгълника $CION$ намираме от равенството $S_{CION} = S_{CIOM} - S_{CMN}$. Тъй като $S_{CIOM} = S_{CIE} + S_{MNE} + S_{OIN} = \frac{1}{2}r^2 + r^2 + \frac{1}{2}r \cdot \frac{r}{2} = \frac{7}{4}r^2$ и



Хаим Хаимов, Варна

325

