

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 4, 2012

Задача 1. Нека p е просто число и n е естествено число, по-малко от p . Да се докаже, че числото $(p-1)!C_{n+p}^n + 1$ се дели на p .

Йонуц Иваненску, Крайова, Румъния

Решение: Изпълнени са равенствата $S = (p-1)!C_{n+p}^n + 1 = (p-1)! \frac{(n+p)!}{n!p!} + 1 = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}{p} + 1$. Числото $(n+1)(n+2)\cdots(n+p)$ е произведение на p последователни естествени числа. Следователно то се дели на p . Най-големият множител на последното произведение $n+p$ е по-малък от $2p$ и затова един от множителите е равен на p . Тогава числото $\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}{p}$ е произведение от последователни числа, сред които отсъства p , т.е. имаме произведение на $p-1$ различни числа, които не се делят на p и разликата на всеки две от тях не е кратна на p . При деление на тези числа на p се получават остатъци 1, 2, ..., $p-1$. Следователно $S = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}{p} + 1 = M \cdot p + 1.2.3\cdots(p-1) + 1$, където M е естествено число. Сега, като вземем предвид теоремата на Уилсън $1.2.3\cdots(p-1) + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, получаваме, че числото S се дели на p .

Задача 2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Окръжностите $k(J_1)$, $k(J)$, $k(I_1)$ и $k(I)$ се допират външно съответно до страните AB , BC , CD и DA и до продълженията на съответните им съседни страни. Ако $k(J_1)$ и $k(I_1)$ се допират до AB и CD съответно в точките S и T , да се докаже, че S и T са равно отдалечени от средата M на отсечката IJ .

Николай Белухов, Стара Загора

Решение: Означаваме останалите допирни точки така, както е показано на чертежа. От равенството на общи допирателни следват равенствата $SK' + N'T = P'L' + L'Q' = P'Q' = PQ = PL + LQ = SK + TN$. Оттук получаваме

следва $\Delta O'AE \sim \Delta CBD$, откъдето получаваме $\frac{DC}{BC} = \frac{EO'}{AO'}$. Сега желаното нера-

венство е равносилно с $\left| \frac{CO'}{AO'} - \frac{EO'}{AO'} \right| < 1$, т.е. с неравенството $|CO' - EO'| < AO'$.

Отсечките AO' , CO' и EO' свързват върховете на равностранния триъгълник ACE с точката O' и затова от теоремата на Помпею следва, че с тези отсечки може да се построи триъгълник. Последното от своя страна означава, че е изпълнено неравенството $|CO' - EO'| < AO'$. С това задачата е решена.

