

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 4, 2011

Задача 1. Едно цяло положително число n ще наричаме “интересно”, ако може да бъде записано във вида $n = a + b + c$, където $a < b < c$ са цели положителни числа и a дели b , а b дели c . Да се докаже, че само краен брой цели положителни числа не са “интересни” и да се намери сумата им.

Решение: 1) Нека n е нечетно. Ако $n > 5$, то $n = 1 + 2 + (n - 3)$ и затова е “интересно”. Остава да отбележим, че $n = 1$, $n = 3$ и $n = 5$ не са “интересни”.

2) Нека n е четно.

2.1) Ако $n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n > 4$, то $n = 1 + \frac{n-1}{3} + \frac{2(n-1)}{3}$ и затова е “интересно”. Останалото число $n = 4$ от същия вид не е “интересно”. В случай, че $n = 6m$ и $m \equiv 1 \pmod{3}$, по същия начин намираме, че при $m > 4$ числото n е “интересно”, а числата $n = 6$ и $n = 24$ от същия вид не са “интересни”.

2.2) Ако $n \equiv 2 \pmod{3}$ и $n > 8$, то $n = 2 + \frac{n-2}{3} + \frac{2(n-2)}{3}$ и затова е “интересно”. Останалите две числа $n = 2$ и $n = 8$ от същия вид не са “интересни”. В случай, че $n = 6m$ и $m \equiv 2 \pmod{3}$ по същия начин намираме, че при $m > 8$ числото n е “интересно”, а при $m \leq 8$ само числото $n = 12$ от същия вид не е “интересно”.

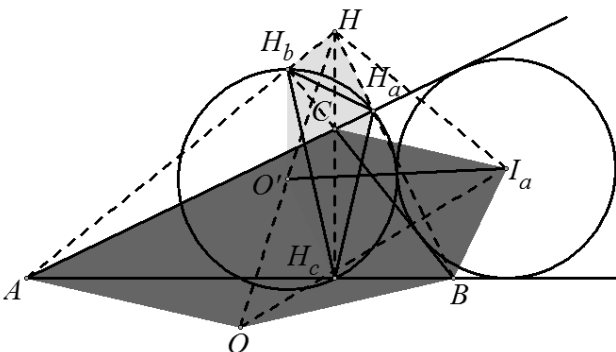
2.3) Ако $n = 3^a \cdot p$ и $a > 1$, където p не се дели на 3, е изпълнено равенството $n = p + 2p + (3^a - 3)p$. Следователно тези n са “интересни”. Остава да отбележим, че случаят $a = 1$ беше разгледан в 2.1) и 2.2).

Така получихме, че само деветте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12 и 24 не са “интересни”. Сумата им е равна на 65.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC , в който O , H и I_a са съответно център на описаната окръжност, ортоцентър и център на външно вписаната окръжност, допираща се до страната BC . Да се докаже, че ако $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 4$, то триъгълникът OI_aH е равнобедрен.

Николай Белухов, Стара Загора

Решение (Николай Белухов): Нека $H_a H_b H_c$ е педалният триъгълник на H спрямо $\triangle ABC$, а O' е центърът на неговата Ойлерова окръжност. Известно е, че триъгълниците ABC и $H_c H_a H_b$ са подобни. Освен това лесно се вижда, че $\triangle ABO \sim \triangle H_b H_c O'$ и $\triangle BCI_a \sim \triangle H_b H_a H$. Следователно



петоъгълниците $AOBI_aC$ и $H_c O' H_b H H_a$ са подобни като съставени от подобни триъгълници. Тъй като коефициентът на подобност на триъгълниците $H_a H_b H_c$ и ABC е равен на $2:1$, то целите фигури имат същия коефициент на подобност. Следователно $OI_a = 2O'H = OH$. С това задачата е решена.

Задача 3. Дадени са правилен тетраедър $T = A_1 A_2 A_3 A_4$ и точките $\sim$ от правите $A_i A_j$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$). Нека H_1, H_2, H_3 и H_4 са точките на Монж, а E_1, E_2, E_3 и E_4 са центровете на Ойлеровите сфери съответно за тетраедрите $T_1 = A_1 A_{12} A_{13} A_{14}$, $T_2 = A_{21} A_2 A_{23} A_{24}$, $T_3 = A_{31} A_{32} A_3 A_{34}$ и $T_4 = A_{41} A_{42} A_{43} A_4$. Да се докаже, че:

- 1) центърът на тежестта на точките H_1, H_2, H_3 , и H_4 съвпада с центъра на T ;
- 2) ако ориентираните обеми на T, T_1, T_2, T_3 и T_4 са съответно V, V_1, V_2, V_3 и V_4 , то за ориентирания обем $\bar{V}$ на тетраедъра $H_1 H_2 H_3 H_4$ е изпълнено равенството $\bar{V} = \frac{1}{4}(V - V_1 - V_2 - V_3 - V_4)$;

3) правите $A_1 E_1, A_2 E_2, A_3 E_3$ и $A_4 E_4$ се пресичат в една точка;

4) правите $l_1 = H_1 E_1, l_2 = H_2 E_2, l_3 = H_3 E_3$ и $l_4 = H_4 E_4$ са успоредни съответно на равнините $\alpha_1 = (A_2 A_3 A_4), \alpha_2 = (A_3 A_4 A_1), \alpha_3 = (A_4 A_1 A_2)$ и $\alpha_4 = (A_1 A_2 A_3)$;

5) тетраедърът $B_1 B_2 B_3 B_4$, получаващ се като част от пространството, заградено от равнините, минаващи през правите l_1, l_2, l_3 и l_4 и успоредни съответно на $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 , е хомотетичен на T .

Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение (Веселин Ненков): Ще използваме барицентрични координати с координатен тетраедър $A_1A_2A_3A_4$, като $A_1(1,0,0,0)$, $A_2(0,1,0,0)$, $A_3(0,0,1,0)$ и $A_4(0,0,0,1)$. Нека $A_{12}(\lambda_{12}, \lambda_{21}, 0, 0) \in A_1A_2$, $A_{13}(\lambda_{13}, 0, \lambda_{31}, 0) \in A_1A_3$, $A_{14}(\lambda_{14}, 0, 0, \lambda_{41}) \in A_1A_4$, $A_{23}(0, \lambda_{23}, \lambda_{32}, 0) \in A_2A_3$, $A_{24}(0, \lambda_{24}, 0, \lambda_{42}) \in A_2A_4$, $A_{34}(0, 0, \lambda_{34}, \lambda_{43}) \in A_3A_4$. Нека L_{23} , L_{34} и L_{42} са средите съответно на отсечките $A_{12}A_{13}$, $A_{13}A_{14}$ и $A_{14}A_{12}$. Тъй като равнините, минаващи през L_{23} , L_{34} и L_{42} , перпендикулярни съответно на правите A_1A_{14} , A_1A_{12} и A_1A_{13} се пресичат в точката на Монж $H_1(x, y, z, t)$ на T_1 , то $L_{23}H_1 \perp A_1A_{14}$, $L_{34}H_1 \perp A_1A_{12}$ и $L_{42}H_1 \perp A_1A_{13}$. Тогава $\overrightarrow{L_{23}H_1} \cdot \overrightarrow{A_1A_{14}} = 0$, $\overrightarrow{L_{34}H_1} \cdot \overrightarrow{A_1A_{12}} = 0$ и $\overrightarrow{L_{42}H_1} \cdot \overrightarrow{A_1A_{13}} = 0$. От тези равенства лесно се вижда, че са изпълнени: $2x - 2t = \lambda_{12} + \lambda_{13}$, $2x - 2z = \lambda_{12} + \lambda_{14}$ и $2x - 2y = \lambda_{13} + \lambda_{14}$, които заедно с равенството $x + y + z + t = 1$ образуват система от четири линейни уравнения с четири неизвестни. След решаването на тази система получаваме

$$(1) H_1 \left(\frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{12} + \lambda_{13} - \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4} \right).$$

По аналогичен начин се получават

$$(2) H_2 \left(\frac{\lambda_{21} - \lambda_{23} - \lambda_{24} + 1}{4}, \frac{\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{21} + \lambda_{23} - \lambda_{24} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{21} - \lambda_{23} + \lambda_{24} + 1}{4} \right),$$

$$H_3 \left(\frac{\lambda_{31} - \lambda_{32} - \lambda_{34} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{31} + \lambda_{32} - \lambda_{34} + 1}{4}, \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{31} - \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{4} \right),$$

$$H_4 \left(\frac{\lambda_{41} - \lambda_{42} - \lambda_{43} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{41} + \lambda_{42} - \lambda_{43} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{41} - \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{4}, \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{4} \right).$$

От (1) и (2) лесно се вижда, че центърът на тежестта на точките H_1 , H_2 , H_3 и H_4 е точката $G\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, която е центърът на T . С това е доказано 1).

Ако точките $M_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) са върхове на тетраедър $M_1M_2M_3M_4$ с ориентиран обем V_0 , то е изпълнено

$$(3) \quad V_0 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix} \cdot V$$

От (1), (2) и (3) следва

$$\bar{V} = \frac{1}{4}(1 - \lambda_{21}\lambda_{31}\lambda_{41} - \lambda_{12}\lambda_{32}\lambda_{42} - \lambda_{13}\lambda_{23}\lambda_{43} - \lambda_{14}\lambda_{24}\lambda_{34}) \cdot V.$$

От друга страна от (3) следват още равенствата $V_1 = \lambda_{21}\lambda_{31}\lambda_{41} \cdot V$, $V_2 = \lambda_{12}\lambda_{32}\lambda_{42} \cdot V$, $V_3 = \lambda_{13}\lambda_{23}\lambda_{43} \cdot V$ и $V_4 = \lambda_{14}\lambda_{24}\lambda_{34} \cdot V$. Така от последните пет равенства следва 2).

Ако G_1 е медицентърът на T_1 , то $G_1 \left(\frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{\lambda_{21}}{4}, \frac{\lambda_{31}}{4}, \frac{\lambda_{41}}{4} \right)$. Тога-

ва от (1) и векторното равенство $\overrightarrow{OE_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OH_1} + 2\overrightarrow{OG_1})$, където O е произволна точка в пространството, се получава

$$E_1 \left(\frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} + 3}{12}, \frac{-\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} + 3}{12}, \frac{-\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} + 3}{12} \right).$$

От друга страна уравненията на правата A_1G са следните:

$$x = 1 - \frac{3}{4} \cdot p, \quad y = \frac{1}{4} \cdot p, \quad z = \frac{1}{4} \cdot p, \quad t = \frac{1}{4} \cdot p, \quad p \in R,$$

откъдето се вижда, че $E_1 \in A_1G$. Аналогично се показва, че $E_2 \in A_2G$, $E_3 \in A_3G$ и $E_4 \in A_4G$. С това 3) е доказано.

Тъй като първата координата на вектора

$$\overrightarrow{G_1H_1} \left(0, \frac{2\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14}}{4}, \frac{-\lambda_{12} + 2\lambda_{13} - \lambda_{14}}{4}, \frac{-\lambda_{12} - \lambda_{13} + 2\lambda_{14}}{4} \right)$$

е нула, то $l_1 \parallel \alpha_1$. Аналогично се вижда, че $l_2 \parallel \alpha_2$, $l_3 \parallel \alpha_3$ и $l_4 \parallel \alpha_4$. С това е доказано 4).

За да докажем 5), определяме уравненията на равнините α_i ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$\alpha_1 : x = \frac{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 1}{4}, \quad \alpha_2 : y = \frac{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 1}{4},$$

$$\alpha_3 : z = \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{4}, \quad \alpha_4 : t = \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{4}.$$

От тези уравнения намираме върховете на тетраедъра $B_1 B_2 B_3 B_4$:

$$\begin{aligned} B_1 & \left(\frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} - 5}{4}, \frac{\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} + 1}{4}, \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{4}, \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{4} \right), \\ B_2 & \left(\frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} - 5}{4}, \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{4}, \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{4} \right), \\ B_3 & \left(\frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} + 1}{4}, \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} - 5}{4}, \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{4} \right), \\ B_4 & \left(\frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} + 1}{4}, \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{4}, \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} - 5}{4} \right). \end{aligned}$$

Разглеждаме точката

$$M \left(\frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{10}, \frac{\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} + 1}{10}, \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{10}, \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{10} \right).$$

Тогава са изпълнени равенствата $\overrightarrow{MB_k} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MA_k}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Следователно $B_1 B_2 B_3 B_4$ е хомотетичен на $A_1 A_2 A_3 A_4$ с център на хомотетия точката M и коефициент $-\frac{3}{2}$.

С това задачата е решена.