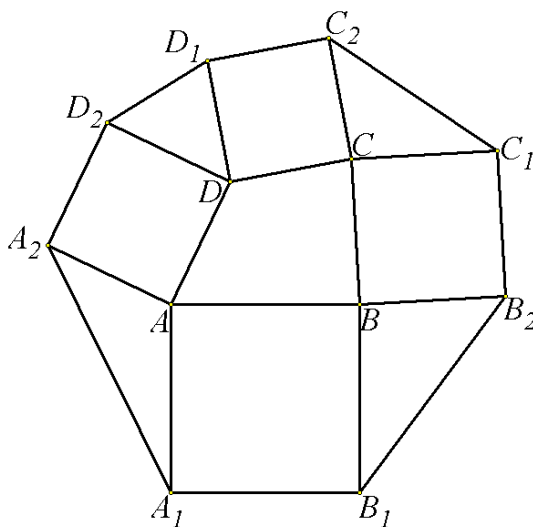


РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 3, 2019

Задача 1. Върху страните AB , BC , CD и DA на изпъкнал четириъгълник $ABCD$, външно за четириъгълника, са построени съответно квадратите ABB_1A_1 , BCC_1B_2 , CDD_1C_2 и DAA_2D_2 . Ако лицата на четириъгълника $ABCD$ и осмоъгълника $A_1B_1B_2C_1C_2D_1D_2A_2$ са съответно S и S_1 , да се намери най-малката стойност на $\frac{S_1}{S}$.

Христо Лесов, Казанлък



Решение: лицето S_1 на осмоъгълника $A_1B_1B_2C_1C_2D_1D_2A_2$ е сума от лицето S на четириъгълника $ABCD$, лицата на квадратите ABB_1A_1 , BCC_1B_2 , CDD_1C_2 и DAA_2D_2 и лицата на триъгълниците AA_1A_2 , BB_1B_2 , CC_1C_2 и DD_1D_2 . Ако дължините на AB , BC , CD и DA са съответно a , b , c и d , лицата на квадратите ABB_1A_1 , BCC_1B_2 , CDD_1C_2 и DAA_2D_2 са равни съответно на a^2 , b^2 , c^2 и d^2 . Ако $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCD = \gamma$ и $\sphericalangle CDA = \delta$, за лицата на триъгълниците AA_1A_2 , BB_1B_2 , CC_1C_2 и DD_1D_2 са изпълнени равенствата $S_{AA_1A_2} = S_{ABD} = -da \sin$,

$$S_{BB_1B_2} = S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \beta, \quad S_{CC_1C_2} = S_{BCD} = \frac{1}{2}bc \sin \gamma \quad \text{и} \quad S_{DD_1D_2} = S_{CDA} = \frac{1}{2}cd \sin \delta.$$

Така получаваме $S_1 = 3S + a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Но $a^2 + b^2 \geq 2ab \geq 2ab \sin \beta = 4S_{ABC}$ и $c^2 + d^2 \geq 2cd \geq 2cd \sin \delta = 4S_{CDA}$. Следователно $S_1 \geq 3S + 4(S_{ABC} + S_{CDA}) = 3S + 4S = 7S$, т.е. $\frac{S_1}{S} \geq 7$. Оттук следва, че търсената най-малка стойност е 7 и тя се достига, когато са изпълнени едновременно равенствата $a = b$, $c = d$ и $\beta = \delta = 90^\circ$.

Задача 2. Диагоналите на вписания в окръжност четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка O , а продълженията на страните AD и BC се пресичат в точка U . Ако P е пресечната точка на OU и DC , да се докаже, че описаната около $\triangle ABP$ окръжност минава през средата на страната CD .

Хаим Хаимов, Варна

Решение: втората обща точка на описаната около $\triangle ABP$ окръжност k със страната DC означаваме с E , а пресечните ѝ точки с правите AD и BC – съответно с M и N . Изпълнени са равенствата $DE \cdot DP = DM \cdot DA$ и $CE \cdot CP = CN \cdot CB$.

Оттук следва $\frac{DE \cdot DP}{CE \cdot CP} = \frac{DM \cdot DA}{CN \cdot CB}$. За да докажем, че $DE = CE$, е достатъчно да докажем равенството

$$\frac{DP}{CP} = \frac{DM \cdot DA}{CN \cdot CB}.$$

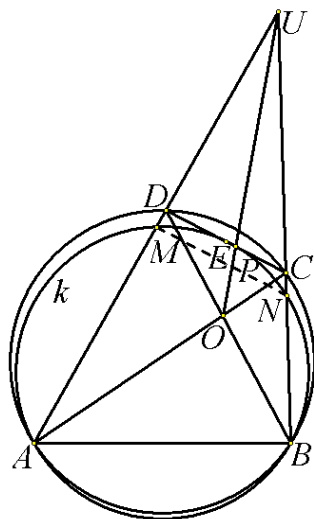
Тъй като $\angle ADB = \angle ACB$, то $\angle ODU = \angle OCU$. Затова

$$\frac{DP}{CP} = \frac{S_{DOU}}{S_{COU}} = \frac{DU \cdot DO}{CU \cdot CO}.$$

Това означава, че желаното равенство ще бъде изпълнено, ако докажем, че (*) $\frac{DU \cdot DO}{CU \cdot CO} = \frac{DM \cdot DA}{CN \cdot CB}$.

Тъй като $\angle NMU = \angle ABU$ и $\angle ABU = \angle CDU$, то $\angle NMU = \angle CDU$.

Следователно $MN \parallel DC$. Оттук имаме $\frac{DU}{CU} = \frac{DM}{CN}$. Така равенството (*)



става равносилно с $\frac{DO}{CO} = \frac{DA}{CB}$. Последното равенство е изпълнено, защото $\triangle AOD \sim \triangle BOC$. С това задачата е решена.

Задача 3. Да се пресметне интегралът $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2(n+1)}} \arcsin \frac{1}{x} dx$, където n е цяло неотрицателно число.

Виктория Събева, Стара Загора

Решение: след полагането $\frac{1}{x} = \sin t$, $x = \frac{1}{\sin t}$, $dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$,

x	1	∞
$t = \arcsin \frac{1}{x}$	$\frac{\pi}{2}$	0

се получава

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2(n+1)}} \arcsin \frac{1}{x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+2} t \left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^{2n} t d(\sin t) = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d(\sin^{2n+1} t) = \\
 &= \frac{1}{2n+1} \left(t \sin^{2n+1} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt \right) = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)^n d \cos t \right) = \\
 &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)^n d \cos t \right) = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (\cos^2 t)^k d \cos t \right) = \\
 &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(\cos t)^{2k+1}}{2k+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} (-1) \right) = \\
 &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right)
 \end{aligned}$$