

Contest Problems
Конкурсни задачи

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 3, 2013

Задача 1. Да се сравнят числата 2^{233} и 5^{100} .

Йонуц Иванеску, Крайова, Румъния

Решение: За първото число, като използваме неравенството на Бернули, имаме:

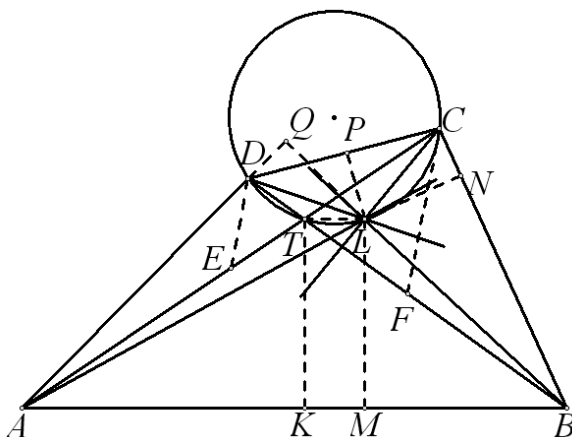
$$\begin{aligned} 2^{233} &= 2^3 \cdot 2^{230} = 8 \cdot (2^{10})^{23} = 8 \cdot 1024^{23} = 8 \cdot \left[1000 \left(1 + \frac{24}{1000} \right) \right]^{23} > 8 \cdot 10^{69} \cdot \left(1 + 23 \cdot \frac{24}{1000} \right) = \\ &= 8 \cdot 10^{69} \cdot \left(1 + \frac{557}{1000} \right) > 8 \cdot 10^{69} \cdot \left(1 + \frac{500}{1000} \right) = 8 \cdot 10^{69} \cdot \frac{3}{2} = 12 \cdot 10^{69} > 10 \cdot 10^{69} = 10^{70}. \end{aligned}$$

От еквивалентните неравенства $128 > 125 \Leftrightarrow 2^7 > 5^3 \Leftrightarrow 2^7 \cdot 5^7 > 5^{10} \Leftrightarrow 10^7 > 5^{10} \Leftrightarrow 10^{70} > 5^{100}$ следва, че $2^{233} > 5^{100}$.

Задача 2. Точките E и F са среди съответно на диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$. Ако $\angle BAE = \angle ADE$ и $\angle ABF = \angle BCF$, да се докаже, че симедианите на триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB съответно през върховете B , C , D и A се пресичат в една точка.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: Нека L е пресечната точка на симедианите на $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ съответно през върховете D и C . Означаваме проекциите на точката L върху страните AB , BC , CD и DA съответно с M , N , P и Q , а проекцията на пресечната точка на диагоналите T върху AB – с K . От определението на симедиана и условието имаме $\angle LDC = \angle ADE = \angle BAE$ и $\angle LCD = \angle BCF = \angle ABF$. Тогава $\triangle DLC \sim \triangle ATB$, откъдето $\angle DLC$



$\angle ATB = \angle DTC$. Следователно четириъгълникът $DLTC$ е вписан в окръжност и $\angle ATL = \angle LDC$. От това равенство и $\angle LDC = \angle BAE$ следва, че $\angle ATL = \angle BAE$, т.е. $LT \parallel AB$. Следователно $TK = LM$. От $\triangle DLC \sim \triangle ATB$ следва $\frac{TK}{AB} = \frac{LP}{CD}$, откъдето $\frac{LM}{AB} = \frac{LP}{CD}$. От друга страна по свойството на симедианата имаме $\frac{LP}{CD} = \frac{LQ}{AD}$ и затова $\frac{LM}{AB} = \frac{LQ}{AD}$. Получаваме, че L е точка от симедианата на $\triangle ABC$ през върха A . Аналогично се доказва, че L лежи върху симедианата на $\triangle ABC$ през върха B . Така установихме, че четирите симедиани се пресичат в една точка.

Задача 3. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k се допира до BC , CA и AB съответно в точките P_a , P_b и P_c , а точката P е симетрична на центъра на k спрямо центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

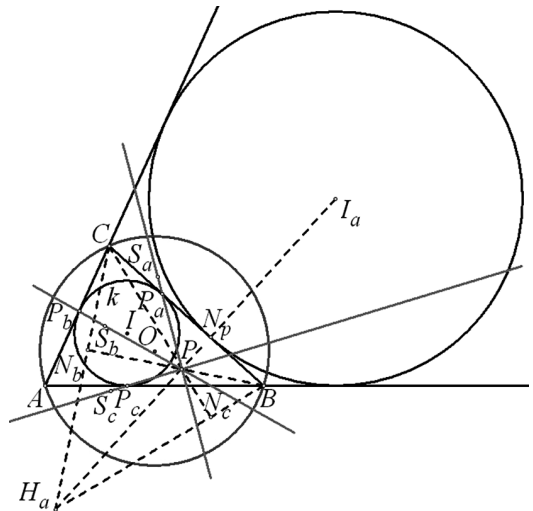
а) Точките N_b , N_c и N_p са петите на височините на $\triangle BCP$ съответно през върховете B , C и P . Ако N'_b , N'_c и N'_p са симетрични съответно на N_b , N_c и N_p спрямо съответните среди на страните, върху които лежат N_b , N_c и N_p , да се докаже, че правите BN'_b , CN'_c и PN'_p се пресичат в една точка S_a .

б) Ако точките S_b и S_c са определени съответно за триъгълниците CAP и ABP по същия начин, както S_a за $\triangle BCP$, да се докаже, че правите P_aS_a , P_bS_b и P_cS_c минават през една точка.

Сава Гроздев, София, Деко Деков, Стара Загора

Решение: Тъй като правите BN_b , CN_c и PN_p се пресичат в една точка H_a (ортоцентър на $\triangle BCP$), то правите BN'_b , CN'_c и PN'_p се пресичат в една точка S_a , която е изотомично спрегнатата с H_a .

Нека I е центърът на вписаната окръжност за $\triangle ABC$, а I_a е центърът на външнописаната му окръжност, допираща се до страната BC в точка P'_a . От свойствата на допирателните лесно се вижда, че точките P_a и P'_a са симетрични спрямо средата на BC . Според твърдение 5 от статията



„Няколко хомотетично породени свойства на Фойербаховите конфигурации“, публикувана в брой 1, 2014 г. на сп. Математика и информатика, точката P лежи върху правата $I_a P'_a$, т.е. тази права съдържа височината на $\triangle BCP$ през върха P (това означава, че $P'_a \equiv N_p$). Следователно изотомичната спрямо $\triangle BCP$ на височината PP'_a е PP_a . От друга страна S_a е изотомична на ортоцентъра H_a и затова лежи върху PP_a . Следователно точките P , P_a и S_a лежат на една права. Аналогично се вижда колинеарността на тройките точки P, P_b, S_b и P, P_c, S_c . Следователно правите $P_a S_a$, $P_b S_b$ и $P_c S_c$ се пресичат в точката P .