

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 3, 2012

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа $\overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m}$, за които е изпълнено равенството $\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m} = \overline{a_1 a_2 \dots a_n} \sqrt{b_1 b_2 \dots b_m}$.

Николай Белухов, Стара Загора

Решение: Нека $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ и $B = \overline{b_1 b_2 \dots b_m}$. От условието следва равенството $A \cdot 10^m + B = A^2 \cdot B$, откъдето $A \cdot 10^m = (A^2 - 1) \cdot B$. Тъй като $(A, A^2 - 1) = 1$, то $A^2 - 1 \mid 10^m$, откъдето $(A - 1)(A + 1) = 2^a \cdot 5^b$. Ако числата $A - 1$ и $A + 1$ са едновременно нечетни, то $a = 0$, а $A - 1$ и $A + 1$ са степени на петицата с разлика две, което е невъзможно. Остава само възможността и двете числа да са четни. Ако $A - 1 = 2$, то се получава едно от решенията, изброени по-долу. В противен случай едно от числата $A - 1$ и $A + 1$ е равно на $2 \cdot 5^b$, а другото – на 2^{a-1} . Оттук нататък, стандартни пресмятания дават само $A = 9$, с което всички решения стават $\sqrt{3375} = 3 \cdot \sqrt{375}$ и $\sqrt{91125} = 9 \cdot \sqrt{1125}$.

Задача 2. Нека ABC е произволен триъгълник, а I центърът на вписаната му окръжност. Ако $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ и n е произволно естествено число, да се докаже, че $a^n \cdot AI + b^n \cdot BI + c^n \cdot CI \leq \sqrt{abc(a^{2n-1} + b^{2n-1} + c^{2n-1})}$.

Каталин Кристеа, Крайова, Румъния

Решение: Първо ще докажем следната:

Лема: За всеки триъгълник ABC е изпълнено равенството: $\frac{AI^2}{bc} + \frac{BI^2}{ca} + \frac{CI^2}{ab} = 1$.

Доказателство на лемата: Използваме известните равенства: $AI = \frac{r}{\sin \frac{\angle A}{2}}$ и

$\sin \frac{\angle A}{2} \cdot \sin \frac{\angle B}{2} \cdot \sin \frac{\angle C}{2} = \frac{r}{4R}$, където r и R са радиусите съответно на вписаната и описаната окръжности. От формулите на Ойлер, Хероновата формула и формулата за лице на триъгълник $S = \frac{abc}{4R}$, получаваме $AI^2 = 16R^2 \sin^2 \frac{\angle B}{2} \cdot \sin^2 \frac{\angle C}{2} =$
 $= 16R^2 \frac{(p-c)(p-a)}{ca} \cdot \frac{(p-a)(p-b)}{ab} = \frac{16R^2 (p-a) S^2}{pa \cdot 4RS} = \frac{bc(p-a)}{p}$. Следователно

$\frac{AI^2}{bc} = \frac{p-a}{p}$. Аналогично $\frac{BI^2}{ca} = \frac{p-b}{p}$ и $\frac{CI^2}{ab} = \frac{p-c}{p}$. След почленно събиране на

последните три равенства получаваме $\frac{AI^2}{bc} + \frac{BI^2}{ca} + \frac{CI^2}{ab} = 1$. С това лемата е доказана.

От лемата следва $a.AI^2 + b.BI^2 + c.CI^2 = abc$. Сега от „хубавото неравенство“ получаваме $abc = \frac{(a^n.AI)^2}{a^{2n-1}} + \frac{(b^n.BI)^2}{b^{2n-1}} + \frac{(c^n.CI)^2}{c^{2n-1}} \geq \frac{(a^n.AI + b^n.BI + c^n.CI)^2}{a^{2n-1} + b^{2n-1} + c^{2n-1}}$, което е еквивалентно с желаното неравенство.

Задача 3. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 90^\circ$. Нека L е точка, за която $LA = LC$ и $\sphericalangle LAD = \sphericalangle LCB$. Да се докаже, че $\cotg \sphericalangle LDA + \cotg \sphericalangle LBA = \cotg \sphericalangle LDC + \cotg \sphericalangle LBC$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: През A, B, C и D построяваме прави a, b, c и d съответно перпендикулярни на LA, LB, LC и LD . Нека освен това $M = a \cap b, N = b \cap c, P = c \cap d$ и $Q = d \cap a$. От вписаните четириъгълници $ALDQ, DLCP, LBNC, AMBL$ и условията имаме $\sphericalangle LQD = \sphericalangle LAD = \sphericalangle LCB = \sphericalangle LNB$ и $\sphericalangle LPD = \sphericalangle LCD = \sphericalangle LAB = \sphericalangle LMB$. Следователно $\triangle QLP \sim \triangle NLM$, откъдето $\frac{LQ}{LP} = \frac{LN}{LM}$, т.е. $LQ.LM = LP.LN$. От друга страна $\sphericalangle QLP + \sphericalangle MLN = (180^\circ - \sphericalangle LQD - \sphericalangle LPD) + (180^\circ - \sphericalangle LMB - \sphericalangle LNB) = 360^\circ - (\sphericalangle LAD + \sphericalangle LAB) - (\sphericalangle LCD + \sphericalangle LDB) = 360^\circ - \sphericalangle DAB - \sphericalangle DCB = 180^\circ$, откъдето получаваме $\sphericalangle QLP + \sphericalangle MLN = 180^\circ$. Тогава $QM.LA = LQ.LM.\sin \sphericalangle QLM = LP.LN.\sin \sphericalangle PLN = PN.LC$. Но по условие $LA = LC$ и следователно $QM = PN$. Затова $\frac{QM}{LA} = \frac{PN}{LC}$ и следователно $\frac{QA+AM}{LA} = \frac{PC+CN}{LC}$. Оттук $\cotg \sphericalangle LQA + \cotg \sphericalangle LMA = \cotg \sphericalangle LPC + \cotg \sphericalangle LNC$. Като се вземе предвид, че $\sphericalangle LQA = \sphericalangle LDA$, $\sphericalangle LMA = \sphericalangle LBA$, $\sphericalangle LPC = \sphericalangle LDC$ и $\sphericalangle LNC = \sphericalangle LBC$. Оттук непосредствено се получава желаното равенство.

