

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 3, 2011

Задача 1. Ако $p = 16k - 5$, $k \in \mathbb{N}$ е цяло положително число, да се докаже, че съществуват безброй много цели положителни числа x , y и z , за които е изпълнено равенството $x^2 + y^2 - z^2 = p$.

Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение (Светлозар Дойчев): Като използваме, че за произволно цяло число t е изпълнено равенството $[2t^2 - (8k - 2)]^2 + 4t^2 - [2t^2 - (8k - 3)]^2 = p$, виждаме, че тройката от цели числа $x = 2t^2 - (8k - 2)$, $y = 2t^2$, $z = 2t^2 - (8k - 3)$ е решение на уравнението.

Задача 2. Съществува ли такава линейна функция на пет променливи $f(u, w, x, y, z)$, че за всеки триъгълник с радиуси на описаната, вписаната и трите външно вписани окръжности R, r, r_a, r_b, r_c съответно, да е изпълнено $f(R, r, r_a, r_b, r_c) = 0$.

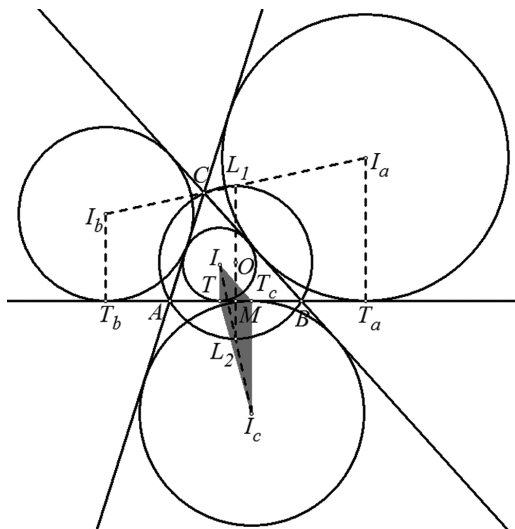
Николай Белухов, Стара Загора

Решение (Николай Белухов): Да, съществува – такава е функцията $f = 4u + w - x - y - z$. Това следва от известното равенство $4R + r = r_a + r_b + r_c$. Последното равенство може да се докаже по следния начин:

Нека L_1 и L_2 са средите на дъгите $\widehat{ACB}$ и $\widehat{BA}$ на описаната за $\triangle ABC$ окръжност, а O, I, I_a, I_b и I_c са обичайните означения за центровете на описаната и вписаните окръжности за $\triangle ABC$. Освен това с M означаваме средата на AB , а с T, T_a, T_b и T_c допирните точки на вписаните за $\triangle ABC$ окръжности с правата AB . Тъй като $I_a I_b A$ и $I_a I_b B$ са правоъгълни триъгълници с обща хипотенуза $I_a I_b$, то L_1 е среда на отсечката $I_a I_b$. Следователно $L_1 M$ е средна основа на трапеца $I_a I_b T_b T_a$ и затова $L_1 M = \frac{1}{2}(r_a + r_b)$. Аналогично $M L_2$ е отсечката свързваща средите на диагоналите на трапеца $I T I_c M$, откъдето

$ML_2 = \frac{1}{2}(r_c - r)$. Сега от равенствата $2R = L_1L_2 = L_1M + ML_2$ следва, че $4R = r_a + r_b + r_c - r$, което е еквивалентно с желаното равенство.

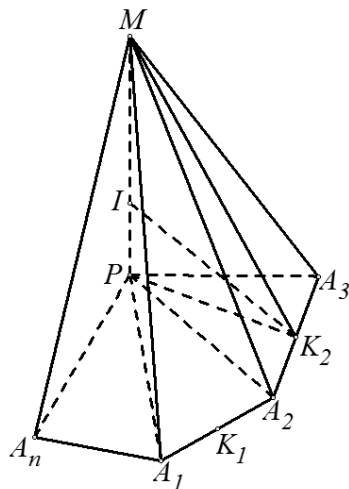
Бележка на автора: Задачата е съставена по задача Сангаку, твърдяща, че радиусът на описаната окръжност на триъгълника, заграден от вторите външни допирателни на външно вписаните окръжности на $\triangle ABC$, има радиус на вписаната окръжност $2R + r = \frac{1}{2}(r_a + r_b + r_c + r)$.



Задача 3. Нека V и V_k са съответно обемът на правилна n -ъгълна пирамида и обемът на вписаното в нея кълбо. Да се определи ъгъла между околната стена и основата на пирамидата, така че частното $\frac{V}{V_k}$ да е най-малко.

Христо Лесов, Казанлък

Решение (Христо Лесов): Нека $MP = h$ е височината към основата на правилна n -ъгълна пирамида, като P е центъра на правилния n -ъгълник, а $K_1, K_2, \dots, K_n$ са средите на страните му. Означаваме $PK_1 = PK_2 = \dots = PK_n = r_1$ и $\angle MK_1P = \angle MK_2P = \dots = \angle MK_nP = \alpha$. Центърът I на вписаното кълбо лежи върху MP и $IP = r$ е неговия радиус, а K_2I е ъглополовяща на $\angle MK_2P$. Обемът на кълбото е $V_k = \frac{4}{3}\pi r^3$, а



за обема V на пирамидата имаме $V = \frac{1}{3} S_{A_1 A_2 \dots A_n} \cdot h$. Тъй като $S_{A_1 A_2 \dots A_n} = n r_1^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$,

а от правоъгълния триъгълник MPK_2 следва $h = r_1 \operatorname{tg} \alpha$, то $V = \frac{n}{3} r_1^3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \alpha$.

Следователно $\frac{V}{V_k} = \frac{n}{4\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \left(\frac{r_1}{r} \right)^3 \operatorname{tg} \alpha$. Тъй като от $\triangle MPK_2$ имаме $\frac{r_1}{r} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$,

то $\frac{V}{V_k} = \frac{n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{4\pi} \cdot \frac{\operatorname{cotg}^3 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg} \alpha}$. Остава да намерим най-малката стойност на израза

$A = \frac{\operatorname{cotg} \frac{3\alpha}{2}}{\operatorname{cotg} \alpha}$ за $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$, т.е. $\frac{\alpha}{2} \in (0^\circ, 45^\circ)$ и $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} > \operatorname{cotg} 45^\circ = 1$. Тъй като

$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}$, то $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{cotg}^4 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$. Полагаме $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = t > 1$ и разглеждаме

функцията $f(t) = \frac{t^2}{t-1}$ за $t > 1$. Тъй като $f(t) - 4 = \frac{(t-2)^2}{t-1}$, то $f(t) \geq 4$, кое-

то показва, че най-малката стойност на $f(t)$ е 4, а на A – е 2 и се достига при

$t = 2$. Следователно най-малката стойност на $\frac{V}{V_k}$ се получава при $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}$

$(\alpha \in (0^\circ, 90^\circ))$.