

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2019

Задача 1. Да се намерят всички тройки естествени числа, които са дължини в сантиметри на ръбовете на правоъгълен паралелепипед с телесен диагонал $\sqrt{2019}$ cm.

Христо Лесов, Казанлък

Решение. Нека $a \geq b \geq c \geq 1$ са дължините в сантиметри на ръбовете на правоъгълен паралелепипед с диагонал $\sqrt{2019}$ cm. Изпълнено е равенството $a^2 + b^2 + c^2 = 2019$. Оттук имаме $3a^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 = 2019$. Следователно $a^2 \geq 673 > 625 = 25^2$. Затоа $a > 25$, т.е. $a \geq 26$. От друга страна, $a^2 + 1^2 + 1^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 = 2019$, което означава, че $a^2 < 2017 < 2025 = 45^2$. Затоа $a < 45$, т.е. $a \leq 44$. По този начин получихме, че $26 \leq a \leq 44$. Като направим необходимите проверки при съответните стойности на a , ще намерим решенията на задачата.

1) При $a = 44$ имаме $b^2 + c^2 = 83$. Оттук $2b^2 \geq b^2 + c^2 = 83$ и $b^2 > 41 > 36 = 6^2$. Следователно $b \geq 7$. Освен това $b^2 + 1^2 \leq b^2 + c^2 = 83$, откъдето $b^2 \leq 82 < 100 = 10^2$. Следователно $b \leq 9$. Така получихме $7 \leq b \leq 9$. При $b = 7$, $b = 8$ и $b = 9$ получаваме съответно $c^2 = 34$, $c^2 = 14$ и $c^2 = 2$. И трите случая не водят до решение на задачата.

2) При $a = 43$ имаме $b^2 + c^2 = 170$. Оттук намираме $10 \leq b \leq 13$. При $b = 10$ и $b = 12$ последното равенство не води до целочислени стойности за c . При $b = 11$ и $b = 13$ получаваме съответно $c = 7$ и $c = 1$. Така получихме следните две тройки решения на задачата $a = 43$, $b = 11$, $c = 7$ и $a = 43$, $b = 13$, $c = 1$.

3) При $a = 42$ имаме $b^2 + c^2 = 255$. Оттук намираме $12 \leq b \leq 15$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение. Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата за c .

4) При $a = 41$ имаме $b^2 + c^2 = 338$. Оттук намираме $13 \leq b \leq 18$. При $b = 14$, $b = 15$, $b = 16$ и $b = 18$ последното равенство не води до целочислени стойности за c . При $b = 13$ и $b = 17$ получаваме съответно $c = 13$ и $c = 7$.

Така получихме следните две тройки решения на задачата $a = 41$, $b = 13$, $c = 13$ и $a = 41$, $b = 17$, $c = 7$.

5) При $a = 40$ имаме $b^2 + c^2 = 419$. Оттук намираме $15 \leq b \leq 20$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c . Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

6) При $a = 39$ имаме $b^2 + c^2 = 498$. Оттук намираме $16 \leq b \leq 22$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c . Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

7) При $a = 38$ имаме $b^2 + c^2 = 575$. Оттук намираме $17 \leq b \leq 23$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c . Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

8) При $a = 37$ имаме $b^2 + c^2 = 650$. Оттук намираме $19 \leq b \leq 25$. При $b = 20$, $b = 21$, $b = 22$ и $b = 24$ последното равенство не води до целочислени стойности за c . При $b = 19$, $b = 23$ и $b = 25$ получаваме съответно $c = 17$, $c = 11$ и $c = 5$. Така получихме следните две тройки решения на задачата $a = 37$, $b = 19$, $c = 17$; $a = 37$, $b = 23$, $c = 11$ и $a = 37$, $b = 25$, $c = 5$.

9) При $a = 36$ имаме $b^2 + c^2 = 723$. Оттук намираме $20 \leq b \leq 26$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c . Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

10) При $a = 35$ имаме $b^2 + c^2 = 794$. Оттук намираме $20 \leq b \leq 28$. При $b = 20$, $b = 21$, $b = 22$, $b = 23$, $b = 24$, $b = 26$, $b = 27$ и $b = 28$ последното равенство не води до целочислени стойности за c . При $b = 25$ получаваме $c = 13$. Така получихме следната тройка $a = 35$, $b = 25$, $c = 13$, която е решение на задачата.

11) При $a = 34$ имаме $b^2 + c^2 = 863$. Оттук намираме $21 \leq b \leq 29$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c . Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

12) При $a = 33$ имаме $b^2 + c^2 = 930$. Оттук намираме $22 \leq b \leq 30$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c . Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

13) При $a = 32$ имаме $b^2 + c^2 = 995$. Оттук намираме $23 \leq b \leq 31$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c . Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

14) При $a = 31$ имаме $b^2 + c^2 = 1058$. Оттук намираме $23 \leq b \leq 31$. При $b = 24$, $b = 25$, $b = 26$, $b = 27$, $b = 28$, $b = 29$, $b = 30$ и $b = 31$ последното равенство не води до целочислени стойности за c . При $b = 23$ получаваме $c = 23$. Така получихме следната тройка $a = 31$, $b = 23$, $c = 23$, която е решение на задачата.

15) При $a = 30$ имаме $b^2 + c^2 = 1119$. Оттук намираме $24 \leq b \leq 30$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c . Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

16) При $a = 29$ имаме $b^2 + c^2 = 1178$. Оттук намираме $24 \leq b \leq 29$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c . Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

17) При $a = 28$ имаме $b^2 + c^2 = 1235$. Оттук намираме $25 \leq b \leq 28$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c . Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

18) При $a = 27$ имаме $b^2 + c^2 = 1290$. Оттук намираме $24 \leq b \leq 27$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c . Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

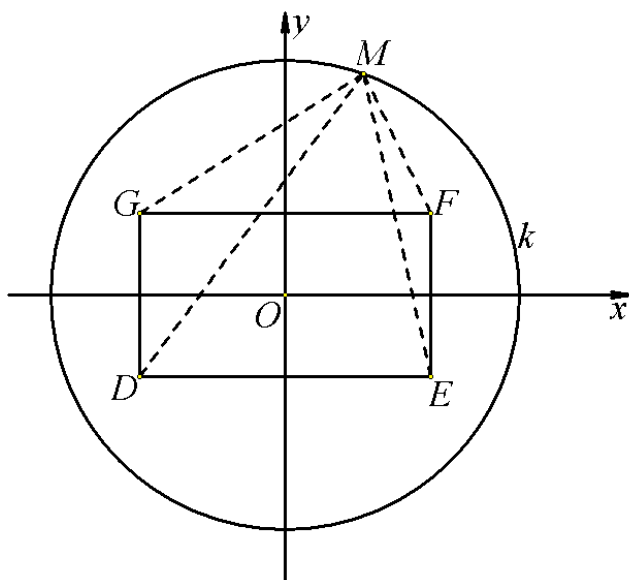
19) При $a = 26$ имаме $b^2 + c^2 = 1343$. Оттук намираме $24 \leq b \leq 26$. С непосредствена проверка се забелязва, че при тези цели стойности за b не се получават цели решения на последното уравнение за c . Така установяваме, че в този случай не се получават решения на задачата.

Заклучаваме, че целочислените тройки (a, b, c) , които са решения на задачата, се изчерпват със следните девет: $(43, 13, 1)$, $(43, 11, 7)$, $(41, 17, 7)$, $(41, 13, 13)$, $(37, 25, 5)$, $(37, 23, 11)$, $(37, 19, 17)$, $(35, 25, 13)$, $(31, 23, 23)$.

Задача 2. Окръжност k с диаметър d_1 и правоъгълник $DEFG$ с диагонал d_2 имат общ център. Да се докаже, че за произволна точка M от k е изпълнено равенството $MD^2 + ME^2 + MF^2 + MG^2 = d_1^2 + d_2^2$.

Милен Найденов, Варна

Решение. Нека O е общият център на k и $DEFG$. Разглеждаме Декартова координатна система Oxy , така че $Ox \perp EF$. Ако $F(n, m)$, то $G(n, -m)$, $E(-n, m)$ и $D(-n, -m)$. Сега, ако $M(x, y)$, то $MD^2 = (x+n)^2 + (y+m)^2$, $ME^2 = (x+n)^2 + (y-m)^2$, $MF^2 = (x-n)^2 + (y-m)^2$ и $MG^2 = (x-n)^2 + (y+m)^2$. От последните равенства следва $MD^2 + ME^2 + MF^2 + MG^2 = 4(x^2 + y^2) + 4(n^2 + m^2)$. Тъй като $x^2 + y^2 = \frac{d_1^2}{4}$ и $n^2 + m^2 = \frac{d_2^2}{4}$, то $MD^2 + ME^2 + MF^2 + MG^2 = d_1^2 + d_2^2$.



Задача 3. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $AD \cdot CD = AB \cdot BC$ и $\angle DAB = \angle DCB$. Точката L е средата на диагонала BD , а M, N, P и Q са ортогоналните проекции на L съответно върху правите AB, BC, CD и DA . Ако E и F са средите съответно на отсечките MP и NQ , да се докаже, че точките E, L и F лежат на една права.

Хаим Хаимов, Варна

Решение. От равенството $AD \cdot CD = AB \cdot BC$ следва, че $\frac{AD}{BC} = \frac{AB}{CD}$. От това равенство и $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$ следва $\triangle ABD \sim \triangle CDB$. Оттук получаваме, че $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$. Затова $ABCD$ е успоредник. Следователно $L \equiv E \equiv F$. Това означава, че всяка права през L има желаното свойство.

