

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2018

Задача 1. Да се намери най-малкото естествено число n , при което n куба с целочислени дължини на ръбовете в сантиметри имат сума на обемите, равна на 2018 cm^3 .

Христо Лесов, Казанлък

Решение: тъй като $12^3 = 1728 < 2018 < 2197 = 13^3$, то 2018 не е куб на естествено число и затова $n > 1$. Разглеждаме последователно случаите за $n \geq 2$.

1) При $n = 2$ разглеждаме естествени числа x и y , за които са изпълнени релациите $x \geq y \geq 1$ и $x^3 + y^3 = 2018$. Тогава $2x^3 \geq x^3 + y^3 = 2018$, откъдето $x^3 \geq 1009 > 1000 = 10^3$, т.е. $x \geq 11$. Освен това $x^3 + 1 \leq x^3 + y^3 = 2018$, откъдето $x^3 \leq 2017 < 2197 = 13^3$, т.е. $x \leq 12$. Така получихме, че $11 \leq x \leq 12$. Лесно се проверява, че при $x = 11$ и $x = 12$ няма естествени стойности на y , за които е изпълнено равенството $x^3 + y^3 = 2018$.

2) При $n = 3$ разглеждаме естествени числа x , y и z , за които са изпълнени релациите $x \geq y \geq z \geq 1$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 2018$. Тогава $3x^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 = 2018$, откъдето $x^3 \geq 672 > 512 = 8^3$, т.е. $x \geq 9$. Освен това $x^3 + 1^3 + 1^3 \leq x^3 + y^3 + z^3 = 2018$, откъдето $x^3 \leq 2016 < 2197 = 13^3$, т.е. $x \leq 12$. Така получихме, че $9 \leq x \leq 12$. Ако $x = 9$ имаме $y^3 + z^3 = 1289$. Оттук $2y^3 \geq y^3 + z^3 = 1289$, $y^3 > 644 > 512 = 8^3$, т.е. $y \geq 9$. Освен това $y^3 + 1^3 \leq y^3 + z^3 = 1289$, $y^3 \leq 1288 < 1331 = 11^3$, т.е. $y \leq 10$. Така получихме, че $9 \leq y \leq 10$. Лесно се проверява, че при $x = 9$ и $y = 9, 10$ няма естествени стойности на z , за които е изпълнено равенството $x^3 + y^3 + z^3 = 2018$. Ако $x = 10$, имаме $y^3 + z^3 = 1018$. Оттук $2y^3 \geq y^3 + z^3 = 1018$, $y^3 > 509 > 343 = 7^3$, т.е. $y \geq 8$. Освен това $y^3 + 1^3 \leq y^3 + z^3 = 1018$, $y^3 \leq 1017 < 1331 = 11^3$, т.е. $y \leq 10$. Така получихме, че $8 \leq y \leq 10$. Лесно се проверява, че при $x = 10$ и $y = 8, 9, 10$

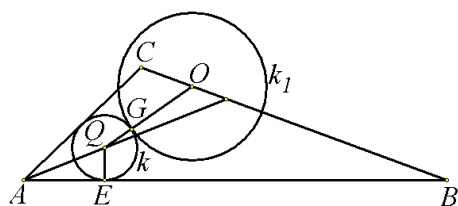
няма естествени стойности на z , за които е изпълнено равенството $x^3 + y^3 + z^3 = 2018$. Ако $x = 12$, имаме $y^3 + z^3 = 290$. Оттук $2y^3 \geq y^3 + z^3 = 290$, $y^3 > 145 = 5^3$, т.е. $y \geq 6$. Освен това $y^3 + 1^3 \leq y^3 + z^3 = 290$, $y^3 \leq 289 < 343 = 7^3$, т.е. $y \leq 6$. Така получихме, че $y = 6$. Лесно се проверява, че при $x = 12$ и $y = 6$ няма естествени стойности на z , за които е изпълнено равенството $x^3 + y^3 + z^3 = 2018$.

3) При $n = 4$ разглеждаме естествени числа x , y , z и t , за които са изпълнени релациите $x \geq y \geq z \geq t \geq 1$ и $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 2018$. Тогава $4x^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 2018$, откъдето $x^3 \geq 504 > 343 = 7^3$, т.е. $x \geq 8$. Освен това $x^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 \leq x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 2018$, откъдето $x^3 \leq 2015 < 2197 = 13^3$, т.е. $x \leq 12$. Така получихме, че $8 \leq x \leq 12$. Ако $x = 12$ имаме $y^3 + z^3 + t^3 = 290$. Оттук $3y^3 \geq y^3 + z^3 + t^3 = 290$, $y^3 > 96 > 64 = 4^3$, т.е. $y \geq 5$. Освен това $y^3 + 1^3 + 1^3 \leq y^3 + z^3 + t^3 = 290$, $y^3 \leq 288 < 343 = 7^3$, т.е. $y \leq 6$. Така получихме, че $5 \leq y \leq 6$. При $y = 6$ имаме $z^3 + t^3 = 74$, откъдето $2z^3 \geq z^3 + t^3 = 74$, $z^3 \geq 37 > 27 = 3^3$, т.е. $z \geq 4$. От друга страна $z^3 + 1^3 \leq z^3 + t^3 = 74$, $z^3 \leq 73 < 125 = 5^3$, т.е. $z \leq 4$. Така получихме, че $z = 4$. Лесно се проверява, че при $z = 4$ равенството $z^3 + t^3 = 74$ не е изпълнено за естествени стойности на t . При $y = 5$ имаме $z^3 + t^3 = 165$, откъдето $2z^3 \geq z^3 + t^3 = 165$, $z^3 > 82 > 64 = 4^3$, т.е. $z \geq 5$. Но $z \leq y = 5$. Следователно $z = y = 5$. Лесно се проверява, че при $z = 5$ равенството $z^3 + t^3 = 165$ не е изпълнено за естествени стойности на t . Ако $x = 11$, имаме $y^3 + z^3 + t^3 = 687$. Оттук $3y^3 \geq y^3 + z^3 + t^3 = 687$, $y^3 > 229 > 216 = 6^3$, т.е. $y \geq 7$. Освен това $y^3 + 1^3 + 1^3 \leq y^3 + z^3 + t^3 = 687$, $y^3 \leq 685 < 729 = 9^3$, т.е. $y \leq 8$. Така получихме, че $7 \leq y \leq 8$. При $y = 8$ имаме $z^3 + t^3 = 175$, откъдето $2z^3 \geq z^3 + t^3 = 175$, $z^3 \geq 87 > 64 = 4^3$, т.е. $z \geq 5$. От друга страна, $z^3 + 1^3 \leq z^3 + t^3 = 175$, $z^3 \leq 174 < 216 = 6^3$, т.е. $z \leq 5$. Така получихме, че $z = 5$. Лесно се проверява, че при $z = 5$ равенството $z^3 + t^3 = 175$ не е изпълнено за естествени стойности на t . При $y = 7$ имаме $z^3 + t^3 = 344$, т.е. $z^3 + t^3 = 7^3 + 1^3$. Тъй като $z \leq y = 7$, то $z = 7$ и $t = 1$. Така стигаме до равенството $11^3 + 7^3 + 7^3 + 1^3 = 2018$. Това означава, че $x = 11$, $y = 7$, $z = 7$, $t = 1$ е решение на поставената задача и най-малкото n , при което се получава решение, е $n = 4$.

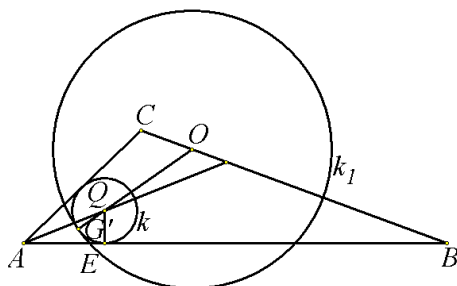
Задача 2. Дадени са $\triangle ABC$ със страни $AB=13$, $BC=10$ и $CA=5$ и окръжност k_1 с радиус 1, която се допира до страните AB и AC на триъгълника. Окръжност k_2 с радиус R се допира до k_1 и има център O , лежащ на страната BC на $\triangle ABC$. Да се намери интервалът, в който се изменят стойностите на R , когато O се движи по BC .

Велина Йорданова, Варна

Решение: за взаимното разположение на окръжностите k и k_1 са възможни два случая: k и k_1 се допират външно (фиг.1) и k и k_1 се допират вътрешно (фиг. 2).



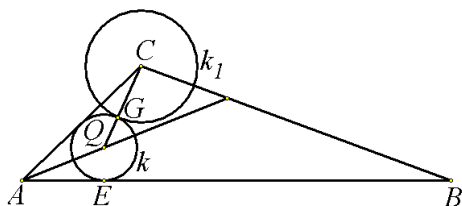
Фигура 1



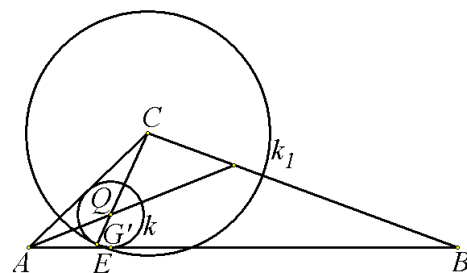
Фигура 2

По-нататък ще използваме означенията върху чертежите. Триъгълникът ABC е тъпоъгълен с тъп ъгъл при върха C . Затова най-малката стойност $R_{\min}$

на R се получава, когато $R = CG$ (фиг. 3) или $R = CG'$ (фиг. 4).

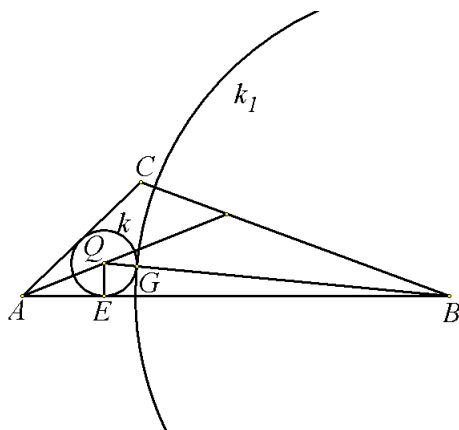


Фигура 3

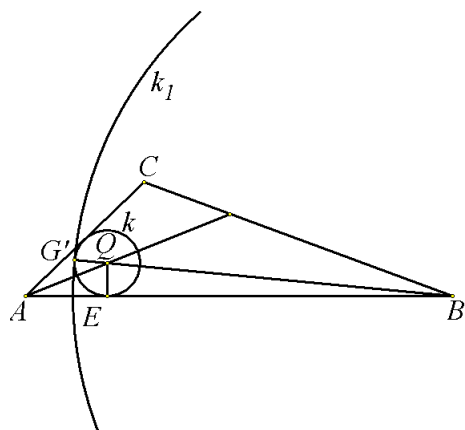


Фигура 4

Най-голямата стойност $R_{\max}$ на R се получава, когато $R = BG$ (фиг. 5) или $R = BG'$ (фиг. 6).



Фигура 5



Фигура 6

От тези наблюдения следва, че е достатъчно да определим дължините на CQ и BQ . Първо определяме AQ от правоъгълния триъгълник AEQ чрез равенството $AQ = \frac{1}{\sin \frac{\angle CAB}{2}}$. От формулите на Ойлер имаме

$$\sin \frac{\angle CAB}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \text{ и } \cos \frac{\angle CAB}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \text{ където } a=10,$$

$$b=5, \quad c=13 \text{ и } p = \frac{a+b+c}{2} = 14. \text{ Следователно } \sin \frac{\angle CAB}{2} = \frac{3}{\sqrt{65}} \text{ и}$$

$$\cos \frac{\angle CAB}{2} = \sqrt{\frac{56}{65}}. \text{ Оттук следва, че } AQ = \frac{\sqrt{65}}{3}. \text{ Сега от косинусовата тео-}$$

$$\text{рема за } \triangle AQC \text{ (фиг. 3, 4) получаваме } CQ = \frac{\sqrt{290-60\sqrt{14}}}{3}. \text{ При външно до-}$$

$$\text{пиране на } k \text{ и } k_1 \text{ имаме } R_{\min} = CQ - 1 = \frac{\sqrt{290-60\sqrt{14}} - 3}{3} \text{ (фиг. 3). В случай}$$

че окръжностите се допират вътрешно, имаме

$$R_{\min} = CQ + 1 = \frac{\sqrt{290-60\sqrt{14}} + 3}{3} \text{ (фиг. 4). За да определим дължината на}$$

BQ , използваме косинусовата теорема за $\triangle ABQ$. Получаваме

$BQ = \frac{\sqrt{1586-156\sqrt{14}}}{3}$. При външно допиране на k и k_1 имаме

$R_{\max} = BQ - 1 = \frac{\sqrt{1586-156\sqrt{14}} - 3}{3}$ (фиг. 5). В случай че окръжностите се

допират вътрешно, имаме $R_{\max} = BQ + 1 = \frac{\sqrt{1586-156\sqrt{14}} + 3}{3}$ (фиг. 6).

Задача 3. Дадени са изпъкнал четириъгълник $ABCD$ и точка P от равнината му. Да се докаже, че педалните окръжности на P спрямо триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB минават през една точка.

Забележка. Ако ABC е произволен триъгълник и P е точка от равнината му, окръжността (когато съществува), минаваща през ортогоналните проекции на P върху правите BC , CA и AB , се нарича педална окръжност на P спрямо $\triangle ABC$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: решението на задачата се съдържа в статията на автора „Едно твърдение за конкурентност на педални окръжности на точка в равнината на четириъгълник“, публикувана в настоящия брой на списанието.