

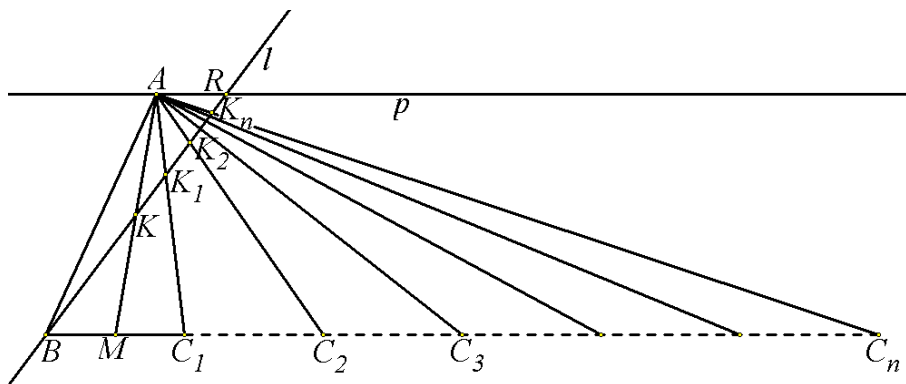
РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2017

Задача 1. Да се определи дали съществуват естествени числа n и k , при които стойността на израза $2017^{n-1} + 3^k + 4$ е:

- куб на естествено число;
- сбор от кубове на две естествени числа;
- сбор от кубове на три естествени числа.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: при $n=1$ и $k=1$ имаме $2017^0 + 3^1 + 4 = 2^3$. Следователно случай а) има положителен отговор. Тъй като при $n \geq 1$ числото $2017^{n-1} - 1$ се дели на $2017 - 1 = 9.224$, то при $n \geq 1$ и $k \geq 2$ имаме $2017^{n-1} + 3^k + 4 = (2017^{n-1} - 1) + (9 \cdot 3^{k-2} + 5) = 9m + 5$, където m е естествено число. Следователно всяко число от разглеждания вид при деление на 9 дава остатък 5. Всяко естествено число е от вида $3c$, $3c+1$ или $3c+2$, а неговият куб при деление на 9 има остатък съответно 0, 1 или 8. Следователно сборът от кубове на две естествени числа при деление на 9 дава остатък $0+0=0$, $0+1=1$, $0+8=8$, $1+1=2$, $1+8=9 \equiv 0$ или $8+8=16 \equiv 7$, а сборът от кубове на три естествени числа при деление на 9 дава остатък $0+0+0=0$, $0+0+1=1$, $0+0+8=8$, $0+1+1=2$, $0+1+8=9 \equiv 0$, $0+8+8=16 \equiv 7$, $1+1+1=3$, $1+1+8 \equiv 1$, $1+8+8=17 \equiv 8$ или $8+8+8=24 \equiv 6$. В никой от тези случаи не се получава остатък 5. Следователно $2017^{n-1} + 3^k + 4$ не може да се представи като сума от кубове нито на две, нито на три естествени числа. Това означава, че случаите б) и в) имат отрицателен отговор.



Задача 2. Даден е $\triangle ABC_1$. Точките $C_2, C_3, \dots, C_n$ лежат върху лъча BC_1 и са такива, че $C_1C_2 = C_2C_3 = \dots = C_{n-1}C_n = BC_1$. Правата l през върха B и средата K на медианата AM на $\triangle ABC_1$ пресича $AC_1, AC_2, \dots, AC_n$ съответно в точките $K_1, K_2, \dots, K_n$. Да се пресметне сумата $\frac{C_1K_1}{K_1A} + \frac{C_2K_2}{K_2A} + \dots + \frac{C_nK_n}{K_nA}$.

Милен Найденов, Варна

Решение: през точката A построяваме права p , успоредна на AC_1 . Нека $BK \cap p = R$. Тъй като $BMRA$ е успоредник, то $AR = BM = \frac{1}{2}BC_1$. Освен това $\triangle AK_nR \sim \triangle BK_nC_n$. Затова $\frac{C_nK_n}{K_nA} = \frac{BC_n}{AR} = \frac{nBC_1}{\frac{1}{2}BC_1} = 2n$. Следователно

$$\frac{C_1K_1}{K_1A} + \frac{C_2K_2}{K_2A} + \dots + \frac{C_nK_n}{K_nA} = 2 + 4 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + \dots + n) = n(n+1).$$

Задача 3. В изпъкналият четириъгълник $ABCD$ точките M, N и P са средите съответно на страните AD, BC и CD , а T е пресечната точка на диагоналите му AC и BD . Ако втората обща точка K на описаните около триъгълниците ABT и CDT окръжности лежи в $\triangle BDC$ и са изпълнени равенствата $\sphericalangle MNP = \sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle ADC$, да се докаже, че точката K лежи върху Ойлеровата права на $\triangle ABD$.

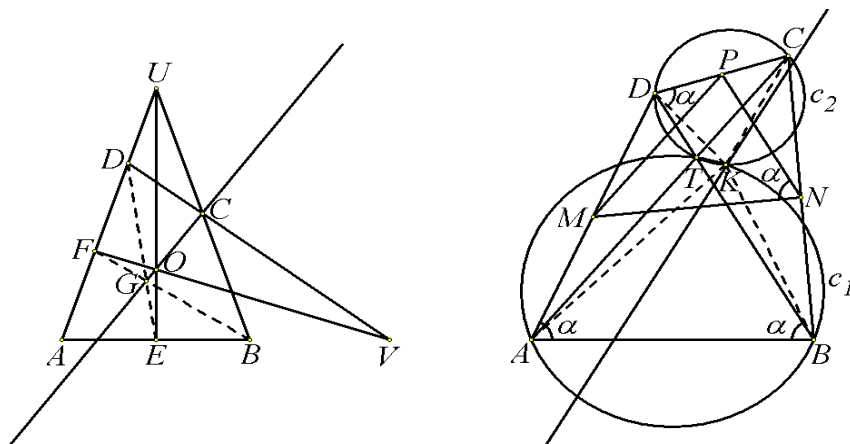
Хаим Хаимов, Варна

Решение: в решението на задачата ще използваме следващата

Лема. Ако в изпъкналият четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB = \sphericalangle ABD$, Ойлеровата права на $\triangle ABD$ минава през върха C .

Доказателство. Нека $BC \cap AD = U$ и $AB \cap CD = V$, а E и F са среди-те съответно на страните AB и CD . От условието следва, че триъгълниците ABU и CDV са равнобедрени. Медианите им UE и VF са симетрали съответно на отсечките AB и CD . Затова пресечната им точка O е центърът на описаната около $\triangle ABD$ окръжност. Тъй като $\sphericalangle ABD < \sphericalangle BAD$, триъгълникът ABD не е равнобедрен. Следователно медианите му DE и BF се пресичат в точка G , която е различна от O . Върховете E, B, V и F, D, U

на шестоъгълника $DEUBFV$ са разположени алтернативно върху две прави. Затова от теоремата на Пап следва, че точките $G = DE \cap BF$, $O = EU \cap FV$ и $C = UB \cap VD$ лежат на една права. С това лемата е доказана.



Премазваме към решението на задачата. От свойствата на вписаните ъгли следва, че $\sphericalangle BDK = \sphericalangle ACK$ и $\sphericalangle DBK = \sphericalangle CAK$. Следователно $\triangle BDK \sim \triangle ACK$ и $\frac{BK}{DK} = \frac{AK}{CK}$. От друга страна $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ATB = \sphericalangle CTD = \sphericalangle CKD$. Следователно $\triangle AKB \sim \triangle CKD$. Оттук $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CDK = \alpha$. Сега от свойствата на средните отсечки следва, че $MP \parallel AC$ и $NP \parallel BD$. Затова $\sphericalangle MPN = \sphericalangle ATB = \sphericalangle AKB$. Освен това $\triangle BDK \sim \triangle ACK$ (доказано по-горе) и $\frac{AC}{BD} = \frac{AK}{BK}$, откъдето $\frac{MP}{NP} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}BD} = \frac{AC}{BD} = \frac{AK}{BK}$. Следователно $\triangle MPN \sim \triangle AKB$. Оттук след-

ва, че $\sphericalangle MNP = \sphericalangle ABK = \alpha$. По условие имаме $\sphericalangle BAD = \sphericalangle MNP = \alpha$ и $\sphericalangle ADC = \sphericalangle MNP = 2\alpha$. Затова $\sphericalangle ADK = \sphericalangle ADC - \sphericalangle CDK = \alpha$. Така получиме $\sphericalangle KDA = \sphericalangle DAB = \sphericalangle ABK = \alpha$. Тъй като по условие точката K лежи в $\triangle BDC$, то за четириъгълника $ABKD$ са изпълнени условията на лемата. Следователно точката K лежи върху Ойлеровата права на $\triangle ABD$.