

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2013

Задача 1. Реалните числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ и a са такива, че:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n-1}{2} + a, \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{n-1}{4} + a^2, \quad a > \frac{1}{2}.$$

Намерете най-голямата стойност на x_n .

Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния

Решение: От условието получаваме $\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 =$
 $= (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \frac{n}{4} = \frac{n-1}{4} + a^2 - \frac{n-1}{2} - a + \frac{n}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$. Сле-
 дователно $\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$. Тъй като $a > \frac{1}{2}$, то $x_n - \frac{1}{2} \leq a - \frac{1}{2}$, т.е. $x_n \leq a$. От-
 тук следва, че най-голямата стойност на x_n е a , като равенство се достига при

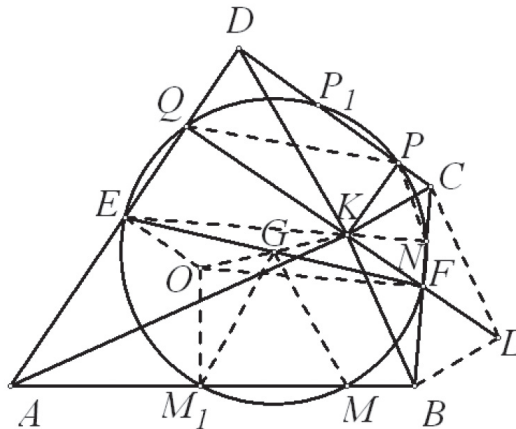
$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \frac{1}{2}.$$

Задача 2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който съществува такава точка K , че са изпълнени равенствата $\sphericalangle AKB = \sphericalangle CKD = 90^\circ$ и $AK \cdot CK = BK \cdot DK$. Страните AD и BC не са успоредни, а θ е пресечната точка на симетралите им. Да се докаже, че ортогоналните проекции на точките θ и K върху страните на $ABCD$ лежат на една окръжност.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: Нека E и F са средите съответно на AD и BC , а L е симетричната на точката K спрямо F . Тъй като $KBLC$ е успоредник, то са изпълнени равенствата $\sphericalangle LCK = 180^\circ - \sphericalangle BKC = (360^\circ - \sphericalangle AKB - \sphericalangle CKD) - \sphericalangle BKC = \sphericalangle AKD$ и $\frac{CK}{CL} = \frac{CK}{BK} = \frac{DK}{AK}$. Следователно $\triangle LKC \sim \triangle AKD$ и $\sphericalangle LKC = \sphericalangle ADK$. Означаваме пресечната точка на

правите KL и AD с Q . Понеже $\angle QKD + \angle ADK = \angle QKD + \angle LKC = 180^\circ - \angle DKC = 90^\circ$, то $KQ \perp AD$. Следователно Q е проекцията на K върху AD и тя лежи върху окръжността k с диаметър EF . Аналогично се доказва, че проекцията N на K върху BC лежи върху k . Нека M и P са проекциите на K съответно върху правите AB и CD . От вписаните четириъгълници $QKPD$, $PKNC$ и правоъгълния триъгълник CKD имаме $\angle KQP = \angle KDP = 90^\circ - \angle KCP = \angle CKP = \angle CNP$. Следователно четириъгълникът $QFNP$ е вписан в окръжност, т.е. точката P лежи на окръжността през точките Q , N и F , а това е окръжността k . По същия начин се доказва, че и точката M лежи на k . Нека сега M_1 и P_1 са проекциите на O съответно върху правите AB и CD . Тъй като $KF \perp AD$ и $EO \perp AD$, то $KF \parallel EO$. Аналогично се получава, че $KE \parallel FO$. Следователно $OFKE$ е успоредник и средата G на отсечката EF е среда на отсечката OK . Понеже средната основа на трапеца $MKOM_1$ е медиана и височина в $\triangle M_1GM$, то $M_1G = MG$. Но M лежи върху k и следователно $M_1 \in k$. Аналогично се доказва, че $P_1 \in k$. С това е доказано, че проекциите на точките K и O върху страните на четириъгълника $ABCD$ лежат на една окръжност k .



Задача 3. В равнината са разположени два изпъкнали четириъгълника P и P' така, че през една от общите им точки O всяка права l пресича P по отсечка, която е по-дълга от отсечката, по която l пресича P' . Възможно ли е лицето на P' да е 1,9 пъти по-голямо от лицето на P ?

Николай Белухов, Стара Загора

Решение: Ще покажем, че е възможно лицето на P' да бъде $2 - \varepsilon$ пъти по-голямо от лицето на P за произволно положително $\varepsilon < 2$. Нека $ABCD$ е квадрат с център O , а точките A' , B' и C' са симетричните на O съответно спрямо A , B и C . Тогава за всяка права l през O , с изключение на правата AC , отсечките $l \cap ABCD$ и $l \cap A'B'C'$ имат равни дължини. Нека точките M и N лежат съответно върху отсечките $B'A'$ и $B'C'$ по такъв начин, че $B'M : B'A' = B'N : B'C' = \sqrt{\frac{2-\varepsilon}{2}}$. Сега разглеждаме четириъгълника P' , който е хомотетичен на $B'MON$ при хомотетия с център O и коефициент $\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{2}}$. Оттук следва, че четириъгълниците $P \equiv ABCD$ и P' удовлетворяват условието на задачата, като лицето на P' е $2 - \varepsilon$ пъти по-голямо от лицето на P .