

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2012

Задача 1. В множеството на реалните числа е дефинирана бинарна операция $\otimes: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, където $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, която условно ще наричаме умножение и такава, че за всеки три реални числа a , b и c , където $b \neq 0$, е в сила равенството $a \otimes (b \otimes c) = \frac{a \cdot c}{b}$. Ако е известно, че $2012 \otimes 2012 = 1$, да се пресметне $(2011 \otimes 2012) \otimes (2011 \otimes 2012)$.

Живко Желев, Стара Загора

Решение: Първи начин (**авторско решение**).

Нека $1 \otimes 1 = t \in \mathbb{R}$. Тогава $a \otimes t = a \otimes (1 \otimes 1) = \frac{a \cdot 1}{1} = a$. Оттук получаваме $1 = 2012 \otimes 2012 = 2012 \otimes (2012 \otimes t) = \frac{2012 \cdot t}{2012} = t$. Следователно $t = 1 \otimes 1 = 1$. Тогава $(2011 \otimes 2012) \otimes (2011 \otimes 2012) = (2011 \otimes (2012 \otimes 1)) \otimes (2011 \otimes (2012 \otimes 1)) =$
 $= \frac{2011 \cdot 1}{2012} \otimes \frac{2011 \cdot 1}{2012} = \frac{2011}{2012} \otimes \frac{2011}{2012} = \frac{2011}{2012} \otimes \left(\frac{2011}{2012} \otimes 1 \right) = \frac{2011}{2012} \cdot \frac{2012}{2011} = 1$.

Втори начин (**автор доц. д-р Юлия Нинова**).

$$\begin{aligned} (2011 \otimes 2012) \otimes (2011 \otimes 2012) &= \frac{(2011 \otimes 2012) \cdot 2012}{2011} = \\ &= \frac{2012}{2011} \cdot (2011 \otimes 2012) = 2012 \otimes (2011 \otimes (2011 \otimes 2012)) = \\ &= 2012 \otimes \frac{2011 \cdot 2012}{2011} = 2012 \otimes 2012 = 1. \end{aligned}$$

Както обръща внимание доц. д-р Юлия Нинова, близки по съдържание на тази задача са и следни две задачи.

Задача 1.1. В множеството на положителните рационални числа е дефинирана операция $*$ така, че за всеки четири елемента x , y , z и t са изпълнени:

$$1) (x * y)(z * t) = (xz) * (yt); 2) x * x = 1; 3) x * 1 = x.$$

Намерете $27 * 43$.

$$\text{Решение. } 27 * 43 = \left(43 \cdot \frac{27}{43} \right) * (43 \cdot 1) = (43 * 43) \cdot \left(\frac{27}{43} * 1 \right) = 1 \cdot \frac{27}{43} = \frac{27}{43}.$$

Задача 1.2. В множеството $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ е дадена бинарна операция $*$ с условията: 1) $(xy) * z = x(y * z)$; 2) $x * x = 1$, за всяко $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Пресметнете $12 * 18$.

$$\text{Решение. } 12 * 18 = \left(\frac{12}{18} \cdot 18 \right) * 18 = \frac{12}{18} \cdot (18 * 18) = \frac{12}{18} \cdot 1 = \frac{12}{18}.$$

Задача 2. Нека $ABCD$ е правоъгълник, за който $AB \geq BC$, а M е такава вътрешна точка за $ABCD$, че $\angle MAB = \angle MCB = 30^\circ$. Да се докаже, че $ABCD$ е квадрат тогава и само тогава, когато $MA \cdot MC = 2(2 - \sqrt{3}) \cdot AB \cdot BC$.

Каталин Кристеа, Крайова, Румъния

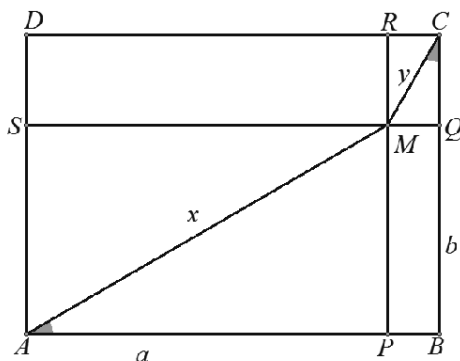
Решение: Нека $AB=a$, $BC=b$, $MA=x$ и $MB=y$. Означаваме ортогоналните проекции на M върху AB , BC , CA и DA съответно с P , Q , R и S . От услови-

ето следват равенствата $MP = \frac{x}{2}$, $MR = \frac{y\sqrt{3}}{2}$,

$MS = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ и $MQ = \frac{y}{2}$. Като вземем предвид, че $MP + MR = b$ и $MS + MQ = a$, получаваме системата уравнения

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} = b, \\ \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} = a. \end{cases}$$

Решенията на тази система се изразяват с равенствата $x = a\sqrt{3} - b$ и $y = b\sqrt{3} - a$. Нека сега $ABCD$ е квадрат, т.е. $a = b$. Тогава $MA \cdot MC = (a\sqrt{3} - a)^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 \cdot a^2 = 2(2 - \sqrt{3}) \cdot AB \cdot BC$. Обратно, да предположим, че е изпълнено равенството $MA \cdot MC = 2(2 - \sqrt{3}) \cdot AB \cdot BC$. Тогава $MA \cdot MC = (a\sqrt{3} - b)(b\sqrt{3} - a) = 4ab - (a^2 + b^2)\sqrt{3} \leq 4ab - 2ab\sqrt{3} = 2(2 - \sqrt{3})ab$. Тъй като равенство се достига, когато $a = b$, то $ABCD$ е квадрат.



Задача 3. Нека α_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) са вътрешните ъгли на изпъкнал седмоъгълник. Каква зависимост съществува между коефициентите на уравнението $ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h = 0$, $abcdefgh \neq 0$, ако корените му са равни на $\operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{20}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$)? Как би изглеждала такава зависимост, ако корените на уравнението са $\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{20}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$)?

Милен Найденов, Варна

Решение: Означаваме $\beta_i = \frac{\alpha_i}{20}$ и $A_i = \operatorname{ctg} \beta_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$). За произволни β_i ($i = 1, 2, 3, 4$) (не непременно свързани с условието на задачата) са изпълнени следните равенства:

$$\operatorname{ctg}(\beta_1 + \beta_2) = \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ctg} \beta_2 - 1}{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2} = \frac{A_1 A_2 - 1}{A_1 + A_2}, \quad \operatorname{ctg}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = \frac{A_1 A_2 A_3 - A_1 - A_2 - A_3}{A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_1 - 1},$$

$$\operatorname{ctg}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) = \frac{A_1 A_2 A_3 A_4 - A_1 A_2 - A_1 A_3 - A_1 A_4 - A_2 A_3 - A_2 A_4 - A_3 A_4 + 1}{A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_4 + A_2 A_3 A_4 + A_3 A_4 A_1 - A_1 - A_2 - A_3 - A_4}.$$

Тъй като $\sum_{i=1}^7 \beta_i = 45^\circ$, от първото равенство получаваме:

$\operatorname{ctg}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) \cdot \operatorname{ctg}(\beta_5 + \beta_6 + \beta_7) - 1 = \operatorname{ctg}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) + \operatorname{ctg}(\beta_5 + \beta_6 + \beta_7)$,
което според второто и третото равенства води до

$$\begin{aligned} & (A_1 A_2 A_3 A_4 - A_1 A_2 - A_1 A_3 - A_1 A_4 - A_2 A_3 - A_2 A_4 - A_3 A_4 + 1) \cdot (A_5 A_6 A_7 - A_5 - A_6 - A_7) - \\ & - (A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_4 + A_2 A_3 A_4 + A_3 A_4 A_1 - A_1 - A_2 - A_3 - A_4) \cdot (A_5 A_6 + A_6 A_7 + A_7 A_5 - 1) = \\ & = (A_1 A_2 A_3 A_4 - A_1 A_2 - A_1 A_3 - A_1 A_4 - A_2 A_3 - A_2 A_4 - A_3 A_4 + 1) \cdot (A_5 A_6 + A_6 A_7 + A_7 A_5 - 1) + \\ & + (A_5 A_6 A_7 - A_5 - A_6 - A_7) \cdot (A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_4 + A_2 A_3 A_4 + A_3 A_4 A_1 - A_1 - A_2 - A_3 - A_4). \end{aligned}$$

Означаваме с σ_i елементарните симетрични полиноми от степен i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) на величините $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ и A_7 . След разкриване на скобите отляво и отдясно на последното равенство получаваме съответно $\sigma_7 - \sigma_5 + \sigma_3 - \sigma_1$ и $\sigma_2 - \sigma_4 + \sigma_6 - 1$ т.е. изпълнено е равенството $\sigma_7 - \sigma_5 + \sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_2 - \sigma_4 + \sigma_6 - 1$.

От формулите на Виет за разглежданото уравнение следва, че $\sigma_1 = -\frac{b}{a}$, $\sigma_2 = \frac{c}{a}$, $\sigma_3 = -\frac{d}{a}$, $\sigma_4 = \frac{e}{a}$, $\sigma_5 = -\frac{f}{a}$, $\sigma_6 = \frac{g}{a}$ и $\sigma_7 = -\frac{h}{a}$. След заместване в горното равенство окончателно получаваме търсената зависимост $a+b+e+f=c+d+g+h$. Същата зависимост между коефициентите на уравнението се получава, ако то има за корени числата $\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{20}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$).