

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1/2016

Задача 1. Целочислените редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ са дефинирани чрез равенствата $x_1 = a - 1$, $y_1 = a + 1$, $x_n = a \cdot x_{n-1} + a - 1$, $y_n = a \cdot y_{n-1} - a + 1$, при $n \geq 2$.

а) Да се докаже, че за всяко цяло число a точно едно от числата x_n , y_n и $\frac{1}{2}(x_n + y_n)$ се дели на 3.

б) Да се определят целите числа a , за които x_n и y_n са взаимно прости числа за всяко естествено число n .

Христо Лесов – Казанлък

Решение: дадените рекурентни равенства представяме по следния начин: $x_n + 1 = a(x_{n-1} + 1)$ и $y_n - 1 = a(y_{n-1} - 1)$. От тях получаваме последователно $x_{n-1} + 1 = a(x_{n-2} + 1)$ и $y_{n-1} - 1 = a(y_{n-2} - 1)$, ..., $x_2 + 1 = a(x_1 + 1)$ и $y_2 - 1 = a(y_1 - 1)$. След почленно умножаване на съответните равенства за отделните редици намираме равенствата: $x_n + 1 = a^{n-1}(x_1 + 1)$ и $y_n - 1 = a^{n-1}(y_1 - 1)$. Оттук следва, че $x_n = a^n - 1$ и $y_n = a^n + 1$. Нека a е цяло число. Тъй като x_n , $\frac{1}{2}(x_n + y_n)$ и y_n са три последователни числа, точно едно от тях се дели на 3. С това твърдение а) е доказано. По-нататък от получените за x_n и y_n равенства следва, че ако a е нечетно число, то x_n и y_n са четни за всяко естествено число n . Ако a е четно, то x_n и y_n са нечетни и е изпълнено равенството $x_n - y_n = 2$. Оттук следва, че най-големият общ делител на x_n и y_n е делител на 2. Тъй като тези числа са нечетни, то най-големият им общ делител е 1. Затова при всяко естествено число n и всяко четно число a числата x_n и y_n са взаимно прости. С това задачата е решена.

Задача 2. Един изпъкнал четириъгълник се нарича хармоничен, ако е вписан в окръжност и произведенията на срещуположните му страни са равни помежду си. Нека $ABCDEF$ е изпъкнал шестоъгълник, в който четириъгълниците $ABDF$ и $ACDE$ са хармонични. Да се докаже, че средите M , N ,

P съответно на диагоналите AD , BE , CF и пресечната точка Q на BE и CF лежат на една окръжност.

Хаим Хаимов – Варна

Решение: в решението на задачата ще използваме следната

Лема. Ако $ABCD$ е хармоничен четириъгълник и U е средата на диагонала AC , то са изпълнени равенствата: 1) $\sphericalangle AUB = \sphericalangle AUD$; 2) $BU \cdot DU = \frac{1}{4} \cdot AC^2$.

Доказателство. От теоремата на Птолемей $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ за вписан четириъгълник и равенството $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ от определения следва $2 \cdot AB \cdot CD = AC \cdot BD$, което е еквивалентно с $\frac{AB}{AU} = \frac{BD}{CD}$. Освен това $\sphericalangle BAU = \sphericalangle BDC$ (вписани ъгли). Следователно $\triangle ABU \sim \triangle DBC$. Оттук $\sphericalangle AUB = \sphericalangle DCB$ и $\frac{AU}{BU} = \frac{CD}{BC}$. Аналогично се получава, че $\triangle UAD \sim \triangle CBD$, откъдето $\sphericalangle AUD = \sphericalangle DCB$ и $\frac{AU}{DU} = \frac{BC}{CD}$. От равенствата между ъглите следва $\sphericalangle AUB = \sphericalangle AUD$, а от равенствата на отношенията се получава $BM \cdot DM = AM^2 = \frac{1}{4} \cdot AC^2$. С това лемата е доказана.

Преминаваме към решение на задачата. Прилагаме 1) от лемата към хармоничните четириъгълници $ABDF$ и $ACDE$ и получаваме съответно равенствата $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMF$ и $\sphericalangle CMD = \sphericalangle EMD$. След почленно събиране на тези равенства следва, че $\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD = \sphericalangle AMF + \sphericalangle EMD$.

Оттук $\sphericalangle BMC = \sphericalangle FME$. Използвайки това равенство, получаваме $\sphericalangle BME = \sphericalangle BMF + \sphericalangle FME = \sphericalangle BMF + \sphericalangle BMC = \sphericalangle FME$, т.е. $\sphericalangle BME = \sphericalangle FME$. Сега прилагаме 2) от лемата към $ABDF$ и $ACDE$ и получаваме съответно $BM \cdot FM = \frac{1}{4} AD^2$ и $EM \cdot CM = \frac{1}{4} AD^2$. Следователно $\frac{BM}{CM} = \frac{EM}{FM}$. От това равенство и последното равенство между ъгли следва, че $\triangle BME \sim \triangle CMF$. Тъй като MN и MP са съответни медиани в двата подобни триъгълника, то $\sphericalangle MNE = \sphericalangle MPF$, т.е. $\sphericalangle MNE = \sphericalangle MPQ$. Оттук следва, че $\sphericalangle MNQ + \sphericalangle MPQ = 180^\circ$. Последното равенство означава, че точките M , N , P и Q лежат на една окръжност.

Задача 3. Да се намери множеството от точки M , двете допирателни през които към дадена елипса са перпендикулярни.

Милен Найденов – Варна

Решение: спрямо каноничната си координатна система Oxy елипсата има уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Нека точката $M(\xi, \eta)$ е от търсеното геометрично място и лежи върху допирателна l с уравнение $y = kx + n$. От двете уравнения следва квадратното уравнение $(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2knx + a^2(n^2 - b^2) = 0$. Правата l е допирателна тогава и само тогава, когато дискриминантата на последното уравнение е нула. Следователно е изпълнено равенството $n^2 = a^2k^2 + b^2$. Тъй като $M \in l$, то $\eta = k\xi + n$. Затова $\eta - k\xi = \pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}$. След повдигане в квадрат на двете страни на последното равенство стигаме до квадратното спрямо k уравнение $(a^2 - \xi^2)k^2 + 2\xi\eta k + b^2 - \eta^2 = 0$.

Ако k_1 и k_2 са корените на това уравнение, от формулите на Виет следва, че $k_1k_2 = \frac{b^2 - \eta^2}{a^2 - \xi^2}$. Тъй като k_1 и k_2 са ъгловите коефициенти на двете допирателни през M и тези допирателни трябва да са перпендикулярни, то $k_1k_2 = -1$. Оттук следва, координатите на M удовлетворяват равенството $\xi^2 + \eta^2 = a^2 + b^2$. Последното е уравнение на окръжност с център O и радиус $\sqrt{a^2 + b^2}$. Следователно търсеното геометрично място е окръжността, описана около правоъгълника, определен от върховете допирателни на елипсата.