

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2021

Задача 1. Да се реши в естествени числа уравнението:

$$n^k - 5n + 10 = 2$$

Решение. Да разгледаме даденото уравнение по модул 7. При деление на 7 степените на двойката дават остатъци 1, 2 или 4. Директна проверка показва, че $n^3 - 5n + 10$ не може да дава остатъци 2 или 4. Следователно $2^k - 1$ се дели на 7, откъдето следва, че k се дели на 3. При $k = 3s$ имаме:

$$(n - 2^s)(n^2 + n2^s + 4^s) = 5(n - 2)$$

При $n = 1$ горното уравнение няма решение, а при $n = 2$ решението е $s = 1$, като тогава $k = 3$. При $n > 2$ дясната страна на уравнението е положителна и следователно $n > 2^s$ и тогава:

$$(n - 2^s)(n^2 + n2^s + 4^s) \geq n^2 + n2^s - 4^s \geq n^2 + 2n + 4 > 5n - 10$$

като последното неравенство следва от $n^2 - 3n + 14 > 0$.

Полученото противоречие показва, че единственото решение е $n = 2, k = 3$.

Задача 2. За положителните числа a, b, c и d е изпълнено равенството $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Да се докаже, неравенството:

$$a + b + c + d + \frac{1}{abcd} \geq 18$$

Решение. От неравенството $1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt{abcd}$ следва, че $\frac{1}{abcd} \geq 16$. Използваме неравенството между средното аритметично и средното геометрично за числата a, b, c, d и 32 числа $\frac{1}{32abcd}$. Получаваме:

$$a + b + c + d + 32 \cdot \frac{1}{32abcd} \geq 36 \sqrt[36]{\frac{abcd}{32^{32}(abcd)^{32}}} = \frac{36}{32^{\frac{8}{9}}(abcd)^{\frac{31}{36}}} \geq 36 \cdot 2^{-\frac{40}{9}} \cdot 2^{\frac{31}{9}} = 18$$

Задача 3. Положителните числа x, y, z, α, β и γ удовлетворяват равенствата:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ и } x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy \cos \gamma + yz \cos \alpha + zx \cos \beta)$$

Да се докаже, че от отсечки с дължини x, y и z може да се построи триъгълник с ъгли α, β и γ .

Решение. От равенството

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy \cos \gamma + yz \cos \alpha + zx \cos \beta) = (y \sin \gamma - z \sin \beta)^2 + (y \cos \gamma + z \cos \beta - x)^2$$

следва, че $y \sin \gamma = z \sin \beta$, т.е. $\frac{y}{\sin \beta} = \frac{z}{\sin \gamma}$. Аналогично получаваме, че $\frac{y}{\sin \beta} = \frac{x}{\sin \alpha}$. Следователно за някое R имаме $\frac{y}{\sin \beta} = \frac{z}{\sin \gamma} = \frac{x}{\sin \alpha} = 2R$. Да разгледаме триъгълник с ъгли α, β и γ . Като използваме подходяща хомотетия, преобразуваме този триъгълник в подобен на него триъгълник с радиус на описаната окръжност R . Сега от равенствата $\frac{y}{\sin \beta} = \frac{z}{\sin \gamma} = \frac{x}{\sin \alpha} = 2R$ следва, че страните на този триъгълник са x, y и z .