

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2018

Задача 1. Да се докаже, че:

а) $2015! + 2016! + 2017$ се дели на 2017 ;

б) $2017 + 2018!$ се дели на 4068289 .

Христо Лесов, Казанлък

Решение на Златка Петрова от Ямбол: а) От дефиницията за факториел имаме $2015! + 2016! + 2017 = 2015! + 2015! \cdot 2016 + 2017 = 2015! \cdot 2017 + 2017 = (2015! + 1) \cdot 2017$. Оттук очевидно следва, че разглежданото число се дели на 2017 .

б) Лесно се проверява, че 2017 е просто число. Затова от теоремата на Уилсън следва, че $(2017 - 1)! \equiv 1 \pmod{2017}$, т.е. $2016! \equiv -1 \pmod{2017}$. Сега, като вземем предвид, че $4068289 = 2017^2$, получаваме

$$\begin{aligned} 2017 + 2018! &= 2017 + 2016! \cdot 2017 \cdot 2018 = 2017 \cdot (1 + 2018 \cdot 2016!) \equiv \\ &\equiv 2017 \cdot (1 - 2018) \pmod{2017} \equiv 2017^2 \pmod{2017}, \end{aligned}$$

което доказва твърдение б).

Задача 2. Да се докаже, че всяка от симедианите в триъгълник с лице S разделя триъгълника на два триъгълника, лицата на които са корени на уравнението

$$(u^2 + v^2)^2 x^2 - S(u^2 + v^2)^2 x + S^2 u^2 v^2 = 0,$$

където u и v са дължините на прилежащите на симедианата страни на триъгълника.

Милен Найденов, Варна

Решение на Златка Петрова от Ямбол: ще докажем твърдението за симедиана през върха C на $\triangle ABC$. Нека $CA = u$, $CB = v$, CE е медиана, CP е симедиана (правите CE и CP са симетрични спрямо ъглополовящата при върха C), $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle ECB = \varphi$, S_1 и S_2 са съответно лицата на триъгълниците APC и BPC .

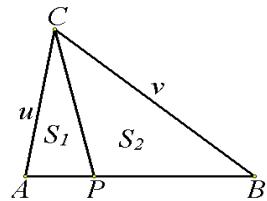
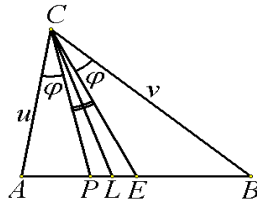
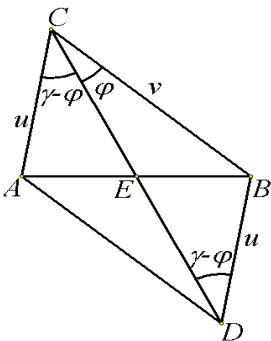
План за решение. 1) Доказваме, че $\frac{u}{v} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\gamma - \varphi)}$; 2) Определяме ъглите между симедианата и прилежащите към нея страни и използваме формулата $S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ за изразяване на отношението $S_1 : S_2$; 3) Намираме S_1 и S_2 по известни сбор и частно; 4) Съставяме уравнението с корени S_1 и S_2 , след което го преобразуваме до вида, посочен в условието на задачата.

Изпълнение на решението. Ако D е точката, симетрична на C спрямо E , ще получим успоредник $ADBC$. В триъгълника CDB са изпълнени равенствата $CB = v$, $BD = CA = u$, $\angle DCB = \varphi$ и $\angle CDB = \gamma - \varphi$. Прилагаме синусовата теорема за $\triangle CDB$ и стигаме до равенството 1). От симетрията на CP и CE спрямо ъглополовящата през върха C следва, че $\angle ACB$ и $\angle PCE$ имат обща ъглополовяща. Затова $\angle ACP = \angle ECB = \varphi$ и $\angle PCB = \gamma - \varphi$. От формулата за изразяване лицето на триъгълник чрез две страни и заключенния ъгъл между тях получаваме $\frac{S_1}{S_2} = \frac{u \cdot CP \cdot \sin \varphi}{v \cdot CP \cdot \sin(\gamma - \varphi)} = \frac{u \cdot \sin \varphi}{v \cdot \sin(\gamma - \varphi)}$. Оттук

и равенството 1) следва $\frac{S_1}{S_2} = \frac{u^2}{v^2}$. От свойството на пропорциите получаваме

последователно $\frac{S_1 + S_2}{S_2} = \frac{u^2 + v^2}{v^2}$, $\frac{S}{S_2} = \frac{u^2 + v^2}{v^2}$, $S_2 = \frac{Sv^2}{u^2 + v^2}$. Оттук следва,

че $S_1 = S - S_2 = \frac{Su^2}{u^2 + v^2}$. Едно уравнение, което има за корени S_1 и S_2 , е следното $(x - S_1)(x - S_2) = 0$, т.е. $x^2 - (S_1 + S_2)x + S_1S_2 = 0$. След заместване на получените изрази за S_1 и S_2 и извършване на някои преобразувания получаваме $(u^2 + v^2)^2 x^2 - S(u^2 + v^2)^2 x + S^2 u^2 v^2 = 0$. С това задачата е решена.



Задача 3. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с център I , като продълженията на страните му AD и BC се пресичат в точка U . Ако M е втората пресечна точка на описаните окръжности на триъгълниците ABU и DCU , да се докаже, че $MI = \sqrt{MB \cdot BD}$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение на Златка Петрова от Ямбол: въвеждаме следните означения: $\sphericalangle AUB = \gamma$, $\sphericalangle MUA = \varphi$, радиусите на описаните окръжности за триъгълниците ABU и DCU са съответно с дължини R и r , а вторите пресечни точки на тези окръжности с правата UI са съответно K и P . С O означаваме центъра на вписаната в $\triangle DCU$ окръжност.

План на решението. 1) Доказваме, че $PI = PD$ и $KI = KA$; 2) Изразяваме чрез синусовата теорема отсечките MP , MK , DP , KA , MD и MB ; 3) Доказваме, че MI е ъглополовяща в $\triangle KPM$ и я изразяваме чрез формулата за ъглополовящата; 4) Извършваме тригонометрични преобразувания, за да докажем, че $MI = \sqrt{MB \cdot BD}$.

Помощна задача. Ако k е описаната окръжност на $\triangle ABC$, точката O е центърът на вписаната му окръжност и правата CO пресича k за втори път в точка T , то $TA = TO$.

Доказателство: от това, че CO е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$, следва, че T е среда на дъгата $\widehat{AB}$. Следователно хордите TA и TB са равни. Ако $\sphericalangle CAB = 2x$ и $\sphericalangle ACB = 2y$, то

$$\sphericalangle OAT = \sphericalangle OAB + \sphericalangle BAT = x + \sphericalangle BCT = x + y,$$

$$\sphericalangle AOT = \sphericalangle OAC + \sphericalangle ACO = x + y.$$

Следователно триъгълникът OAT е равнобедрен и $OT = AT$. Така получихме, че $TA = TO$.

Преминаваме към решението на задачата. От помощната задача непосредствено следва, че $KI = KA$ и $PO = PC = PD$. Тогава точката P е център на описаната окръжност за $\triangle OCD$. Правите DI и DO са ъглополовящи на съседни ъгли, което означава, че $\sphericalangle ODI = 90^\circ$. Аналогично $\sphericalangle OCI = 90^\circ$. Следователно четириъгълникът $ODIC$ е вписан в окръжност с център P . Оттук следва, че $PI = PD$. Сега от синусовата теорема за триъгълниците MPU , MKU , DPU , AKU , MDU и MBU получаваме съответно

$$MP = 2r \sin\left(\varphi + \frac{\gamma}{2}\right), \quad MK = 2R \sin\left(\varphi + \frac{\gamma}{2}\right), \quad PI = DP = 2r \sin \frac{\gamma}{2},$$

$KI = KA = 2R \sin \frac{\gamma}{2}$, $MD = 2r \sin \varphi$ и $MB = 2R \sin(\varphi + \gamma)$. От тези равенства следва $MP : MK = PI : KI = r : R$. Следователно MI е ъглополовяща в $\triangle MKP$. Сега изразяваме ъглополовящата MI по следния начин:

$$MI^2 = MP \cdot MK - PI \cdot KI = 4rR \sin^2 \left(\varphi + \frac{\gamma}{2} \right) - 4rR \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 4rR \sin \varphi \sin(\varphi + \gamma) = MD \cdot MB.$$

С това задачата е решена.

