

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2017

Задача 1. Нека $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ са различни прости числа, по-малки от 2017, за които числото $s_n = x_1^{2017} + x_2^{2017} + \dots + x_n^{2017}$ се дели на 2017. Да се намери най-малкото естествено число n , при което $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ приема най-малка стойност.

Христо Лесов – Казанлък

Решение: съгласно малката теорема на Ферма за всяко естествено число a и просто число p , числото $a^p - a$ се дели на p , т.е. a^p дава остатък a при деление на p . Тъй като 2017 е просто число, от тази теорема следва, че x_k^{2017} дава остатък x_k при деление на 2017 и s_n дава остатък $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ при деление на 2017. Но по условие s_n се дели на 2017, а $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ е естествено число, така че неговата най-малка стойност е 2017. Нека за определеност имаме $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. При $n=1$ са изпълнени неравенствата $2 < x_1 < 2017$ и не се получава решение на задачата. При $n=2$ имаме $x_1 + x_2 = 2017$. Ако $x_1 = 2$, то $x_2 = 2015$ не е просто число. Ако $x_1 \geq 3$ и $x_2 \geq 5$, то x_1 и x_2 са нечетни прости числа, а $x_1 + x_2$ е четно естествено число, т.е. различно от 2017. При $n=3$ имаме $x_1 + x_2 + x_3 = 2017$. Ако $x_1 = 2$, то $x_2 + x_3 = 2015$, като $x_2 \geq 3$ и $x_3 \geq 5$. Следователно x_2 и x_3 са нечетни прости числа, а $x_2 + x_3$ е четно естествено число, т.е. различно от 2015. Ако $x_1 = 3$, то $x_2 + x_3 = 2014$ и $x_2 = 11$, $x_3 = 2003$ са прости числа, които изпълняват изискванията на задачата. Следователно $n = 3$.

Задача 2. Целите числа a, b и c удовлетворяват равенството $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = 0$. Да се докаже, че $(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$ е точна трета степен на цяло число.

Тодор Митев – Русе

Решение: в статията на автора „Няколко олимпиадни задачи“, „Математика плюс“, 1, 2017, 48 – 50, е доказано следното твърдение. Ако k, u, v, w са реални числа, за които са изпълнени неравенствата $k \neq 0$ и $S = u + v + w \neq 0$, то равенствата $[(k-3)u + 3S][(k-3)v + 3S][(k-3)w + 3S] = (k^2 + 3k + 9)S^3$ и $u^3 + v^3 + w^3 = kuvw$ са еквивалентни.

Прилагаме това твърдение при $k = -6$, $u = a$, $v = b$ и $w = c$. Получаваме равенството

$$(-6a + 3b + 3c)(3a - 6b + 3c)(3a + 3b - 6c) = 27(a + b + c)^3,$$

т.е.

$$(b + c - 2a)(c + a - 2b)(a + b - 2c) = (a + b + c)^3.$$

Това доказва твърдението на задачата.

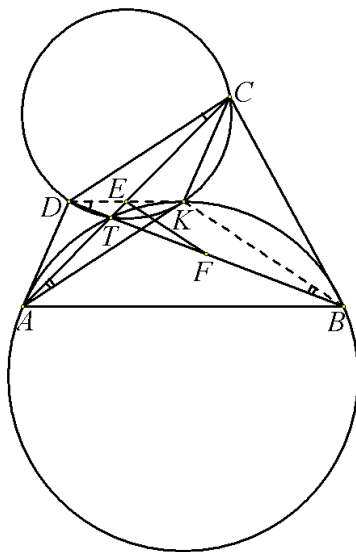
Задача 3. За изпъкналият четириъгълник $ABCD$ са изпълнени условията $AC = BD$, $CD^2 = AD \cdot AB$ ($CD \neq AD$) и $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABD$. Ако E и F са средите съответно на диагоналите AC и BD , да се докаже, че $CD = 2.EF$.

Хаим Хаимов – Варна

Решение: означаваме с T пресечната точка на диагоналите AC и BD , а с K – втората пресечна точка на описаните около триъгълниците ABT и CDT окръжности. От свойствата на вписаните ъгли имаме равенствата $\sphericalangle KDB = \sphericalangle KDT = \sphericalangle KCT = \sphericalangle KCA$. Аналогично се получава $\sphericalangle KBD = \sphericalangle KAC$. Следователно

$$\triangle ACK \sim \triangle BDK. \text{ Оттук следват равенствата } \frac{KC}{KD} = \frac{KA}{KB} = \frac{AC}{BD} = 1,$$

т.е. $KC = KD$ и $KA = KB$. Освен това $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ATB = \sphericalangle CTD = \sphericalangle CKD$. Затова равнобедрените триъгълници ABK и CDK са по-



добни. Следователно $\frac{AK}{CK} = \frac{AB}{CD}$. Като вземем пред-
вид, че по условие е изпълнено равенството $\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{AD}$,
получаваме $\frac{AK}{CK} = \frac{CD}{AD}$. Нека сега K_1 е точката, симетрична на
 D спрямо E . Ще докажем, че $K_1 \equiv K$. За целта да допуснем, че
това не е вярно. Четириъгълникът AK_1CD е успоредник, откъде-
то следва, че $AK_1 = CD$ и $CK_1 = AD$. Тогава $\frac{AK_1}{CK_1} = \frac{CD}{AD} = \frac{AK}{CK}$.

Освен това от успоредника AK_1CD следва, че $\sphericalangle K_1AD = \sphericalangle K_1CD$. Тъй като
 $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABD$ (по условие) и $\sphericalangle KAC = \sphericalangle KBD$ (доказано по-горе), то
 $\sphericalangle KAD = \sphericalangle KAC + \sphericalangle CAD = \sphericalangle KBD + \sphericalangle ABD = \sphericalangle KBA$. От подобие на три-
ъгълниците ABK и CDK следва, че $\sphericalangle KBA = \sphericalangle KAB = \sphericalangle KCD$. Следовател-
но $\sphericalangle KAD = \sphericalangle KBA = \sphericalangle KCD$. Сега имаме $\sphericalangle K_1AK = |\sphericalangle K_1AD - \sphericalangle KAD| =$
 $= |\sphericalangle K_1CD - \sphericalangle KCD| = \sphericalangle K_1CK$. Оттук следва $\Delta K_1AK \sim \Delta K_1CK$, което оз-
начава, че $\Delta K_1AK \cong \Delta K_1CK$. Затова $AK_1 = CK_1$ и от успоредника AK_1CD
получаваме, че $AD = CD$. Но по условие $AD \neq CD$, а това води до противо-
речие с допускането, че $K_1 \neq K$. Следователно $K_1 \equiv K$ и $CD = AK = BK$.
Но EF е средна отсечка в ΔBKD и затова $BK = 2EF$. Следователно
 $CD = 2EF$.