

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2015

Задача 1. Параметрите a и b в уравнението

$$5x^5 + 2x^4 + 4ax^3 - x^2 + 2bx + 4b - a = 0$$

са такива, че то има за корени числата -1 и 2 . Да се намерят останалите корени на уравнението.

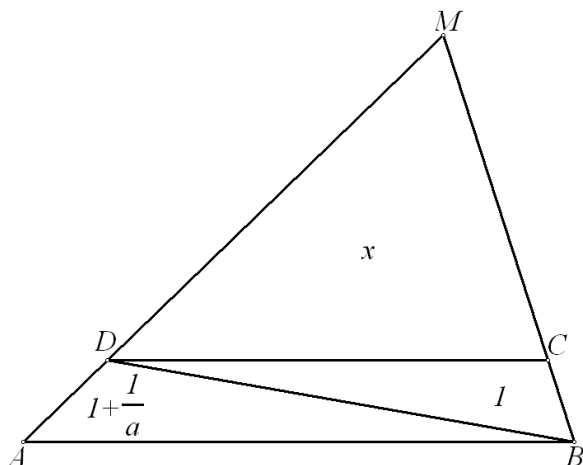
Сава Гроздев, София и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: Тъй като -1 и 2 са корени на даденото уравнение, то след заместване в уравнението се получават съответно равенствата: $-5a + 2b = 4$ и $31a + 8b = -188$. След решаване на получената система от две уравнения с две неизвестни се получава: $a = -4$ и $b = -8$. Заместваме намерените стойности за a , b и стигаме до уравнението $5x^5 + 2x^4 - 16x^3 - x^2 - 16x - 28 = 0$. Тъй като -1 и 2 са корени на това уравнение, се досещаме да го представим във вида $(x + 1)(x - 2)(5x^3 + 7x^2 + x + 14) = 0$. Лесно се вижда, че $5x^3 + 7x^2 + x + 14 = (x + 2)(5x^2 - 3x + 7)$. От първия множител следва, че $x = -2$ е корен на даденото уравнение. За дискриминанта на втория множител се получава стойност -131 , което означава, че той има комплексни корени $\frac{3 \pm i\sqrt{131}}{10}$. Следователно уравнението има три реални корена $x_1 = -2$, $x_2 = -1$,

$x_3 = 2$ и два комплексни корена $x_4 = \frac{3 - i\sqrt{131}}{10}$ и $x_5 = \frac{3 + i\sqrt{131}}{10}$.

Задача 2. Трапец е разделен от единия си диагонал на два триъгълника с лица 1 и $1 + \frac{1}{a}$. Да се намерят стойностите на a , при които лицето на триъгълника, образуван от малката основа на трапеца и продълженията на бедрата му, е точен квадрат.

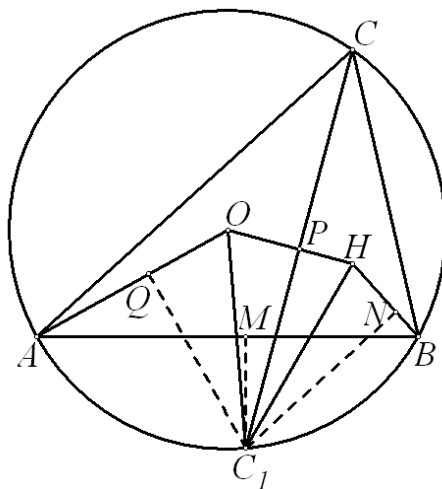
Милен Найденов, Варна



Решение. Нека лицето на триъгълника, образуван от малката основа на трапеца и продълженията на бедрата му, е x . От теоремата на Талес следва пропорцията $\frac{x}{1} = \frac{x+1}{1+\frac{1}{a}}$. Оттук намираме $x = a$. Следователно $a = k^2$ са всички търсени стойности на a , където $k \in \mathbb{N}$.

Задача 3. Точките O и H са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълния триъгълник ABC ($BC < AB < AC$). Точката C_1 е симетрична на C относно правата OH . Да се докаже, че ортогоналните проекции на C_1 върху правите, определящи страните на четириъгълника $ABHO$, са върхове на успоредник.

Хаим Хаимов, Варна



Решение: За елементите на триъгълника ще използваме стандартните означения. Освен това нека $\angle C_1CB = \delta$, $\angle AOH = \varphi$ и $\angle OHB = \psi$. Проекциите на точката C_1 върху правите AB , BH , HO и OA означаваме съответно с M , N , P и Q . Лесно се вижда, че $\angle AOB = 90^\circ - \gamma$, $\angle ABH = 90^\circ - \alpha$, $\angle AHB = 180^\circ - \gamma$, $AH = 2R \cos \alpha$, $C_1H = CH = 2R \cos \gamma$. Тъй като $OC_1 = OC = R$, точката C_1 лежи върху описаната окръжност на $\triangle ABC$. Затова от синусовата теорема получаваме равенствата $BC_1 = 2R \sin \delta$ и $AC_1 = 2R \sin(\gamma - \delta)$. С помощта на синусовата теорема опреде-

ляме страните на четириъгълника $MNPQ$: $MN = BC_1 \sin \angle ABH = 2R \sin \delta \cos \alpha$,
 $PQ = OC_1 \sin \angle AOH = R \sin \varphi$, $PN = C_1H \sin \angle OHB = 2R \cos \gamma \sin \psi$,
 $QM = AC_1 \sin \angle OAB = 2R \sin(\gamma - \delta) \cos \psi$. Тъй като $AH \perp BC$ и $OH \perp C_1C$,
 то $\angle AHO = \angle C_1CB = \delta$. Но от синусовата теорема за $\triangle AOH$ имаме
 $\frac{OA}{\sin \angle AHO} = \frac{AH}{\sin \angle AOH} \Rightarrow \frac{R}{\sin \delta} = \frac{2R \cos \alpha}{\sin \varphi} \Rightarrow R \sin \varphi = 2R \sin \delta \cos \alpha \Rightarrow PQ = MN$.
 От друга страна $\psi = \angle OHB = \angle AHB + \angle AHO = 180^\circ - \gamma + \delta$, откъдето намираме
 $PN = 2R \cos \gamma \sin \psi = 2R \cos \gamma \sin(\gamma - \delta) = QM$. Получените равенства $PQ = MN$ и
 $PN = QM$ означават, че четириъгълникът $MNPQ$ е успоредник.

Решения на задачите получихме от Анна Златева от Варна.