

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2014

Задача 1. Да се докаже, че за произволен триъгълник със страни a , b и c е изпълнено неравенството $(a+b+c)^2(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4) \leq 27a^2b^2c^2$.

Йонуц Иванеску, Крайова, Румъния

Решение: Ако S , R и $p = \frac{a+b+c}{2}$ са съответно лицето, радиусът на описаната окръжност и полупериметърът на триъгълника, то са изпълнени следните релации: $16S^2 = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$, $4SR = abc$ и $p \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$. От двете равенства лесно се вижда, че разглежданото неравенство е еквивалентно с $p \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$, което съвпада със споменатото неравенство.

Задача 2. Ако M е множеството на всички равнобедрени триъгълници, страните и лицето на които са естествени числа, да се намерят три триъгълника от M , различните страни на които са последователни естествени числа.

Милен Найденов, Варна

Решение: като залепим два питагорови триъгълника със страни 3, 4, 5 по катета с дължина 4, получаваме равнобедрен триъгълник с основа $a=6$, бедро $b=5$ и лице $S=12$. Така намираме един от желаните триъгълници. Сега разглеждаме равнобедрените триъгълници, които имат основа $a=10k+6$ и бедро $b=10k+5$ ($k \geq 0$) и това обобщава разгледания случай. Лицето S на триъгълник от този вид, според Хероновата формула, се изразява с равенството $S = (5k+3)\sqrt{75k^2+70k+16}$. При $k=0$ получаваме вече разгледания триъгълник. При $k=6$ получаваме нов триъгълник със страни $a=66$, $b=5$ и лице $S=120$. Сега да увеличим страните на триъгълниците от предишния вид с единица и да разменим местата на основата и бедрото, т.е. разглеждаме равнобедрените триъгълници с основа $a=10k+6$ и бедро $b=10k+7$ ($k \geq 0$). Лицето на триъгълник от този вид се намира по формулата $S = (5k+3)\sqrt{5(15k^2+22k+8)}$. При $k=1$ получаваме трети триъгълник от множеството M , който има основа

$a = 16$, бедро $b = 65$ и лице $S = 1848$. Четвърти триъгълник от M , който се получава по различен начин, има основа $a = 240$, бедро $b = 241$ и лице $S = 25080$.

Задача 3. Ако P е вътрешна точка за изпъкналия четириъгълник $ABCD$, която притежава свойствата $\frac{DP}{CP} = \frac{AD}{BC}$ и $\sphericalangle DPC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle CAD$. Да се докаже,

че са изпълнени равенствата $\frac{DP}{AP} = \frac{CD}{AB}$ и $\sphericalangle APD = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACD$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: Означаваме симетричните точки на D и P относно симетралата на AC съответно с D_1 и P_1 . От свойствата на симетрията и условието получаваме $\frac{D_1P_1}{AP_1} = \frac{DP}{CP} = \frac{AD}{BC} = \frac{CD_1}{BC}$ и $\sphericalangle D_1P_1A = \sphericalangle DPC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD_1 = \sphericalangle D_1CB$. Следователно $\triangle D_1P_1A \sim \triangle D_1CB$. Сега лесно се съобразява, че $\triangle D_1P_1C \sim \triangle D_1AB$, откъдето следва, че $\frac{D_1P_1}{CP_1} = \frac{D_1A}{AB}$ и $\sphericalangle CP_1D_1 = \sphericalangle BAD_1$. От свойствата на симетрията тези равенства водят до $\frac{DP}{AP} = \frac{CD}{AB}$ и $\sphericalangle APD = \sphericalangle BAD_1 = \sphericalangle CAB + \sphericalangle CAD_1 = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACD$.

