

<https://doi.org/10.53656/math2021-4-8-res>

Конкурсни задачи
Contest Problems

Рубриката се води от проф. д.н. Емил Колев

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ БРОЙ 3, 2021 Г.

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа x и y , за които $x + y + 1$ дели $2xy$ и $x + y - 1$ дели $x^2 + y^2 - 1$.

Решение. От тъждеството $(x + y + 1)(x + y - 1) = (x + y)^2 - 1 = x^2 + y^2 - 1 + 2xy$ следва, че $x + y + 1$ дели $x^2 + y^2 - 1$. Следователно $x + y + 1$ и $x + y - 1$ делят $x^2 + y^2 - 1$. Тъй като най-големият общ делител на $x + y + 1$ и $x + y - 1$ е 1 или 2, имаме, че произведението $(x + y + 1)(x + y - 1)$ дели $x^2 + y^2 - 1$ или $2(x^2 + y^2 - 1)$. Първият случай е невъзможен, тъй като $(x + y + 1)(x + y - 1) = x^2 + y^2 + 2xy - 1 > x^2 + y^2 - 1$, а вторият случай дава $(x + y + 1)(x + y - 1) = 2(x^2 + y^2 - 1)$. Това равенство е еквивалентно на $(x - y)^2 = 1$. Следователно $|x - y| = 1$ и директно се проверява, че двойките $(x, x \pm 1)$ са решения на задачата.

Задача 2. Нека a , b и c са страни на триъгълник и $ab + bc + ca = 1$. Да се докаже неравенството

$$(a+1)(b+1)(c+1) < 4$$

Решение. Ако $a \geq 1$, то $b + c > a \geq 1$ и получаваме $ab + bc + ca = a(b + c) + bc > 1 + bc > 1$, противоречие. Следователно $a < 1, b < 1, c < 1$, откъдето получаваме

$$(1-a)(1-b)(1-c) > 0$$

Това неравенство е еквивалентно на

$$1 + ab + bc + ca > a + b + c + abc \Leftrightarrow 4 > 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc$$

От последното неравенство имаме $(a+1)(b+1)(c+1) < 4$.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n , за които множеството $\{1, 2, \dots, 3n\}$ може да се раздели на n триелементни множества, като за всяко такова множество $\{a, b, c\}$ числата $b - a$ и $c - b$ са различни елементи от множеството $\{n - 1, n, n + 1\}$.

Решение. Да разгледаме правилен $3n$ -ъгълник $P_1P_2\dots P_{3n}$. Условието на задачата е еквивалентно на разделяне на върховете на този $3n$ -ъгълник на тройки $\{A_i, B_i, C_i\}$, като ъглите на всеки триъгълник $A_iB_iC_i$ са $\frac{n-1}{3n}\pi$,

$\frac{n}{3n}\pi$ и $\frac{n+1}{3n}\pi$. Без ограничение можем да приемем, че една от тройките е $(n, 2n-1, 3n)$. Една от останалите $n-1$ тройки съдържа две числа от интервала $[2n, 3n-1]$, като тези две числа могат да бъдат само $2n$ и $3n-1$, като единствената възможна тройка е $(n-1, 2n, 3n-1)$. Всяка от останалите тройки съдържа по един елемент от всеки от интервалите $[1, n-2]$, $[n+1, 2n-2]$ и $[2n+1, 3n-2]$. За всяка от тези тройки (a, b, c) образуваме $(a, b-2, c-4)$, което дава разделяне на множеството $\{1, 2, \dots, 3(n-2)\}$. Тъй като при $n=1$ такова разделяне е невъзможно, то при нечетно n такова разделяне е невъзможно. При $n=2m$ разделянето $(2i-1, 2i+n, 2i+2n-1)$ и $(2i, 2i+n-1, 2i+2n)$ за $i=1, 2, \dots, m$ удовлетворява условието на задачата.