

<https://doi.org/10.53656/math2021-6-9-res>

Problems and Solutions
Конкурсни задачи

Рубриката се води от проф. д.н. Емил Колев

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ БРОЙ 5, 2021 Г.

Задача 1. Число, което е точен квадрат на естествено число, се записва с няколко единици и една двойка. Докажете, че това число се дели на 11.

Решение. Нека M е такова число. Можем да го запишем като

$$M = \underbrace{11 \dots 1}_m 2 \underbrace{11 \dots 1}_n$$

където $m, n \geq 0$ са броят на единиците съответно преди и след цифрата 2.

Тъй като няма точен квадрат, завършващ на 2: $n \geq 1$.

$$M = (1 + 10^1 + \dots + 10^{n-1}) + 2 \cdot 10^n + 10^{n+1}(1 + 10^1 + \dots + 10^{m-1}) = \frac{10^n - 1}{9} + 2 \cdot 10^n + \frac{10^{n+1}(10^m - 1)}{9} = \frac{10^n(9 + 10^{m+1}) - 1}{9}$$

Знаменателят е точен квадрат, значи числителят също е точен квадрат.

Очевидно числителят е нечетно число, следователно е $1 \pmod{4}$.

Ако $n \geq 2$: $10^n \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 10^n(9 + 10^{m+1}) - 1 \equiv -1 \pmod{4}$ – противоречие. Следователно $n = 1$ и

$$M = \frac{10^{m+2} + 89}{9}$$

Тъй като $10^{m+2} + 89 \equiv (-1)^{m+2} + 1 \pmod{11}$, е достатъчно да докажем, че m е нечетно.

Да допуснем обратното. Тогава

$$10^{m+2} + 89 = r^2 \Leftrightarrow \left(r + 10^{\frac{m+2}{2}}\right)\left(r - 10^{\frac{m+2}{2}}\right) = 89$$

Числото 89 е просто и $r - 10^{\frac{m+2}{2}} < r + 10^{\frac{m+2}{2}}$, следователно $r + 10^{\frac{m+2}{2}} = 89, r - 10^{\frac{m+2}{2}} = 1$, откъдето $10^{\frac{m+2}{2}} = 44$, което е невъзможно.

Задача 2. Квадрат 2021×2021 е разделен на квадрати 1×1 и 2×2 . Докажете, че има ред от квадрата, който пресичат нечетен брой от квадратите на разделянето.

Решение. Да допуснем, че твърдението не е вярно, т.е. всеки ред пресича четен брой квадрати. Нека квадратите 2×2 , които се пресичат от някой ред, са x на брой. Тъй като

всички останали квадрати са 1×1 , то този ред пресича x квадрата 2×2 и $2021 - 2x$ квадрата 1×1 , т.е. общо $x + 2021 - 2x = 2021 - x$ квадрата. Следователно x е нечетно число, което означава, че всеки ред пресича нечетен брой квадрати 2×2 .

Да номерираме редовете на квадрата от долу нагоре с $1, 2, \dots, 2021$. Като приложим доказаното по-горе за първия ред, получаваме, че броят на квадратите, които лежат изцяло в първите два реда, е нечетен. Сега същото свойство за втория ред дава, че броят на квадратите, които лежат изцяло във втория и третия ред, е четен. По индукция следва, че броят на квадратите 2×2 , които лежат изцяло в i -ия и в $i + 1$ -ия ред, е нечетен при нечетно i и четен при четно i . Това означава, че броят на квадратите 2×2 , които лежат изцяло в 2020-ия и в 2021-вия ред е четен. Това е противоречие с доказаното, че всеки ред пресича нечетен брой квадрати 2×2 .

Задача 3: Дадени са различни естествени числа a, b и c , за които

$$(a + b)(a + c) = (b + c)^2$$

Докажете, че $(b - c)^2 > 8(b + c)$.

Решение. Нека d е най-големият общ делител на $a + b$ и $a + c$, т.е. $d = \text{НОД}(a + b, a + c)$. Тогава d дели $(a + b) - (a + c) = b - c$, а от условието следва, че d дели $b + c$. Следователно d дели $(b + c) + (b - c) = 2b$.

Ако съществува прост делител p на d , който дели b , то p дели a и c (тогава $a = pa_1$, $b = pb_1$ и $c = ca_1$) и равенството от условието се свежда до

$$(a_1 + b_1)(a_1 + c_1) = (b_1 + c_1)^2.$$

В този случай трябва да докажем, че $p^2(b_1 - c_1)^2 > 8(b_1 + c_1)$, и тъй като $p^2(b_1 - c_1)^2 > (b_1 - c_1)^2$, задачата се свежда до $d=1$ или $d=2$.

Ако $d=2$, получаваме $a + b = 2m^2$, $a + c = 2n^2$, като тогава $b + c = 2mn$ и $b - c = 2(m^2 - n^2)$. В този случай трябва да докажем

$$4(m^2 - n^2)^2 > 8.2.mn \Leftrightarrow (m^2 - n^2)^2 > 4mn \Leftrightarrow (m - n)^2(m + n)^2 > 4mn$$

Последното неравенство е вярно, защото $m \neq n$, и тогава $(m - n)^2 > 1$, $(m + n)^2 > 4mn$.

Ако $d=1$, получаваме $a + b = m^2$, $a + c = n^2$, като тогава $b + c = mn$ и $b - c = m^2 - n^2$.

В този случай трябва да докажем $(m^2 - n^2)^2 > 8mn \Leftrightarrow (m - n)^2(m + n)^2 > 8mn$. Тъй като $b + c = mn$ и $b - c = m^2 - n^2$ трябва да са с еднаква четност, то m и n са четни числа. Тогава $(m - n)^2 \geq 4$, а $(m + n)^2 > 4mn$ и неравенството е вярно.

Мартин Любомиров Димитров, София