

<https://doi.org/10.53656/math2021-5-3-res>

Конкурсни задачи
Contest Problems

Рубриката се води от проф. д.н. Емил Колев

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ БРОЙ 4, 2021 Г.

Задача 1. Намерете всички взаимно прости естествени числа a и b , за които $\frac{a}{b} = b, a$.

(Забележка: ако $a = 13$ и $b = 79$, то $b, a = 79, 13$)

Решение. Нека числото a има k цифри. Тогава

$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{10^k} \Leftrightarrow ab = (a - b^2)10^k$. Тъй като a и b са взаимно прости, то

$a - b^2$ е взаимно просто и с a и с b . Следователно $a - b^2 = 1$ и получаваме $ab = 10^k$,

като a е k -цифрено число. Това е възможно само когато b е едноцифрено число или 10, и тъй като b дели 10^k , то $b = 1, 2, 4, 5, 8$ или 10. За всяка от тези стойности намираме $a = b^2 + 1$ и проверяваме верността на равенството от условието. Получаваме единствено решение $a = 5, b = 2$.

Задача 2. Окръжността k с център O е описана около триъгълник ABC . Точка M е средата на дъгата BC от k , която не съдържа точката A . Правите през O , успоредни на MB и MC , пресичат AB и AC съответно в точки K и L . Ако перпендикулярът от върха A към BC пресича k в точка N , докажете, че $NK = NL$.

Решение. Тъй като $\angle ABM = \beta + \frac{\alpha}{2}$ и OK е успоредна на NB , то $\angle BKO = \gamma + \frac{\alpha}{2}$. Следователно $\angle BOK = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Аналогично $\angle CLO = \beta + \frac{\alpha}{2}$ и $\angle COL = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Тъй като $OB = OC = R$ и $\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)$, то от синусовата теорема за триъгълници-

те КВО и CLO получаваме $KB = CL = \frac{R \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$. За да докажем,

че $NK = NL$, използваме косинусовата теорема за триъгълниците NBK и NCL . Тъй като $NB = 2R \cos \beta$ и $NB = 2R \cos \gamma$, то е достатъчно да дока-

жем, че $\cos \beta - \cos \gamma = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(\gamma - \beta)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right)}$. Това равенство следва директ-

но от $\cos \beta - \cos \gamma = 2 \sin\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ и

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) = \cos\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right).$$

Задача 3. Дадена е точка P , външна за окръжност C . Отсечките PA и PB са допирателни към C , а точка K е произволна точка от отсечката AB . Описаната около триъгълник PBK окръжност пресича за втори път C в точка T . Точка P' е симетричната на P относно A . Докажете, че $\angle PBT = \angle P'KA$.

Решение. Тъй като КТРВ е вписан четириъгълник $\angle TAK = \angle TBP$ и $\angle AKT = \angle BPT$. Следователно $\triangle TAK \sim \triangle TBP$, откъдето получаваме

$$\frac{TA}{TB} = \frac{AK}{BP} = \frac{AK}{AP'} \Rightarrow \frac{AP'}{TB} = \frac{AK}{TA}.$$

Това равенство заедно с $\angle P'AK = \angle BTA$ означава, че $\triangle P'AK \sim \triangle BTA$ и следователно $\angle P'KA = \angle BAT = \angle PBT$.