

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ БРОЙ 2, 2021 Г.

Задача 1. В равнината са дадени точка A и окръжност k с център O . Намерете геометричното място на центровете на описаните окръжности на триъгълници ABC , където BC е диаметър на k .

Решение. Ако точката A лежи на окръжността k , то всички триъгълници ABC имат център на описаната окръжност точка O . В този случай търсеното множество е точката O .

Нека A е външна за окръжността. Да разгледаме диаметър на k , който е перпендикулярен на AO . Центърът на описаната окръжност за $\triangle ABC$ е точка S върху отсечката AO , за която $SA = SB = SC$. Ще докажем, че търсеното геометрично място е права p през S , перпендикулярна на AO . Да разгледаме произволен диаметър B_1C_1 на k и нека S_1 е пресечната точка на симетралата на B_1C_1 и правата p . Тогава

$$S_1B_1 = S_1C_1 = \sqrt{S_1O^2 + r^2} = \sqrt{S_1S^2 + SO^2 + r^2}$$

От друга страна, за дължината на S_1A получаваме:

$$S_1A = \sqrt{AS^2 + S_1S^2} = \sqrt{BS^2 + S_1S^2} = \sqrt{SO^2 + r^2 + S_1S^2}$$

Следователно $S_1A = S_1B = S_1C$, т.е. S_1 е центърът на описаната окръжност за $\triangle AB_1C_1$. Когато A е вътрешна точка за окръжността, доказателството е аналогично.

Задача 2. Точките P , Q и R от страните на AB , BC и CA на триъгълник ABC ($AC \neq BC$) са такива, че AQ , BR и CP се пресичат в една точка, CP е перпендикулярна на AB и около четириъгълника $ABQR$ може да се опише окръжност. Докажете, че AQ и BR са височини на триъгълника ABC .

Решение. Тъй като $ABQR$ е вписан, получаваме $\sphericalangle RQC = \sphericalangle BAC$ и следователно $\triangle ABC$ и $\triangle QRC$ са подобни. Ако k е коефициентът на подобие на двата триъгълника, имаме $CQ = kb$ и $CR = ka$. Сега от теоремата на Чева получаваме:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{a}{kb} \cdot \frac{ka}{b} = 1$$

и понеже $\frac{AP}{BP} = \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta}$, намираме:

$$\frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta} \cdot \frac{a - kb}{kb} \cdot \frac{ka}{b - ka} = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{a - kb}{b - ka} = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha (a - kb) = \cos \beta (b - ka)$$

От горното равенство при $\alpha \neq \beta$ получаваме

$$k = \frac{a \cos \alpha - b \cos \beta}{b \cos \alpha - a \cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta} = \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{2 \sin(\beta - \alpha)} = \frac{\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} = \cos \gamma$$

Следователно коефициентът на подобие е равен на $\cos \gamma$, т.е. триъгълник

PQR е педалният триъгълник за триъгълник ABC , т.е. AQ и BR са височини на триъгълника ABC .

Задача 3. Дадена е функция $f: N \rightarrow N$, където N е множеството от положителните цели числа. Ако за всеки две $x, y \in N$ е изпълнено равенството $f(xf(y)) = yf(x)$, намерете най-малката възможна стойност на $f(2007)$.

Решение. Ако $f(y_1) = f(y_2)$, то за всяко x имаме: $y_1 f(x) = f(xf(y_1)) = f(xf(y_2)) = y_2 f(x)$ и понеже $f(x)$ е естествено число, то $y_1 = y_2$. При $x = y = 1$ получаваме $f(f(1)) = f(1)$ и следователно $f(1) = 1$. При $x = 1$ сега следва $f(f(y)) = y$, откъдето следва, че ако $f(y) = z$, то $f(z) = y$. Получаваме:

$$f(xz) = f(xf(y)) = yf(x) = f(z)f(x)$$

Да забележим, че ако p е просто число, то $f(p)$ е също просто число. Наистина, ако $f(p) = ab$, то $p = f(f(p)) = f(ab) = f(a)f(b)$ и понеже $a \neq 1$ и $b \neq 1$, то $f(a) \neq 1$ и $f(b) \neq 1$, противоречие. Следователно

$$f(2007) = f(3)^2 f(223)$$

Ако $f(3) = 2$, то $f(2) = 3$ и най-малката стойност на $f(223)$ е 5, като $f(2007) \geq 2^2 \cdot 5 = 20$

Ако $f(3) = 3$, то най-малката стойност на $f(223)$ е 2, като $f(2007) \geq 3^2 \cdot 2 = 18$. Лесно се проверява, че функцията $f(2^k \cdot 223^m \cdot q) = 2^m \cdot 223^k \cdot q$ при $x = 2^k \cdot 223^m \cdot q$ за k и m неотрицателни цели числа удовлетворява условието на задачата и $f(2007) = 3^2 \cdot 2 = 18$.