

РАЗСТОЯНИЯ МЕЖДУ ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНИ ТОЧКИ И НЕРАВЕНСТВА В ИЗПЪКНАЛ ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

Йордан Табов¹⁾, Станислав Стефанов²⁾,
Красимир Кънчев³⁾, Хаим Хаимов

¹⁾Институт по математика и информатика,
Българска академия на науките (България)

²⁾Университет по архитектура, строителство и геодезия (България)

³⁾Висше транспортно училище „Тодор Каблешков“ (България)

Резюме. В тази статия, с помощта на изведените в (Nenkov 2019) и (Nenkov 2022) формули за разстоянията от някои забележителни точки в четириъгълник до върховете и до средите на страните и диагоналите му са получени формули за разстоянията от тези забележителни точки до пресечната точка на диагоналите и до пресечните точки на двойките срещуположни страни на изпъкнал четириъгълник. Изведени са също и формули за разстоянията от още една забележителна точка до върховете на такъв четириъгълник, както и до разгледаните в (Nenkov 2019) забележителни точки. С помощта на получените формули за тези разстояния са доказани ред интересни неравенства.

Ключови думи: изпъкнал четириъгълник; забележителни точки; разстояния между забележителни точки; неравенства в четириъгълник

1. Увод

Един от най-бързо водещите до целта методи за доказване на неравенства в триъгълника се базира на използването на формули за разстояния между негови забележителни точки. Така например с помощта на формулата за разстоянието между центровете на вписаната и описаната му окръжност се доказва неравенството на Ойлер $R \geq 2r$. С помощта на формулата за разстоянието между центъра на описаната му окръжност и точката му на Лемоан се доказва неравенството на Нойберг $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ и т.н.

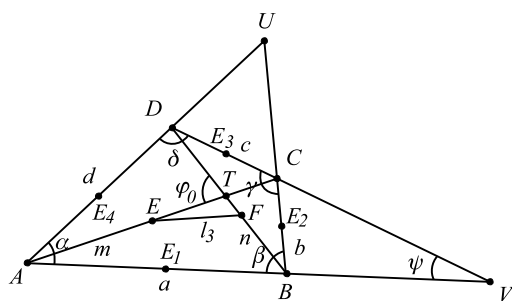
Както е показано в статията, този метод за получаване на геометрични неравенства може да бъде пренесен и в четириъгълника. Той се състои в следното: първо извеждаме формули за разстоянията между различни забележителни точки в четириъгълника, както и за разстоянията между

тях и други, да ги наречем обикновени точки (например: върховете на четириъгълника, пресечната точка на диагоналите му, пресечните точки на продълженията на срещуположните му страни и т.н.). След това съставяме различни триъгълници с върхове три от въпросните точки, за разстоянията между всеки две от които имаме вече изведени формули и към изразените разстояния, явяващи се дължини на страните на тези триъгълници, прилагаме неравенството на триъгълника или някакво друго неравенство. По този начин се получават неравенства в четириъгълника, свързващи мерките на различни негови елементи.

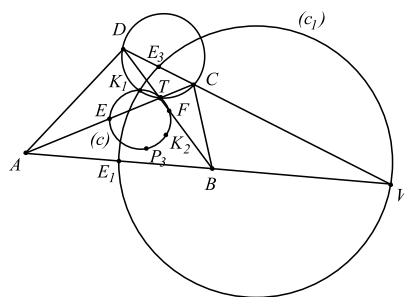
Така в (Nenkov et al. 2019) изведохме интересни неравенства, свързващи дължините на страните и диагоналите на четириъгълника. В настоящата статия извеждаме неравенства, в които освен мерките на страните и диагоналите на четириъгълника участват и мерките на други негови елементи: лицето му, ъгълът между диагоналите му, ъглите между продълженията на срещуположните му страни и др. Получените неравенства, както и изведените в статията формули за разстояния между забележителни точки в четириъгълника, обогатяват познанията ни за него и са важно звено от класическата му геометрия.

2. Забележителни точки. Дефиниции и свойства

В статията разглеждаме изпъкнал четириъгълник $ABCD$ без успоредни страни, в който продълженията на страните AD и BC се пресичат в точката U , а продълженията на AB и DC се пресичат в точката V , като при това C лежи между U и B и между D и V (фиг. 1).



Фигура 1



Фигура 2

Дължините на страните AB , BC , CD и DA означаваме съответно с a , b , c и d , дължините на диагоналите AC и BD – съответно с m и n , а мерките на ъглите при върховете A , B , C и D – съответно с α , β , γ и δ . Средите на страните AB , BC , CD и DA бележим съответно с E_1 ,

E_2 , E_3 и E_4 , а средите на диагоналите AC и BD – съответно с E и F . Въвеждаме и означенията: $AC \cap DB = T$, $\sphericalangle AUB = \varphi$, $\sphericalangle AVD = \psi$, $\sphericalangle ATD = \varphi_0$, $|E_2E_4| = l_1$, $|E_1E_3| = l_2$, $|EF| = l_3$. Отсечките E_2E_4 , E_1E_3 и EF наричаме средни отсечки на четириъгълника. Да отбележим, че техните дължини се определят по следните формули на Ойлер:

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 + a^2 + c^2 - b^2 - d^2}, \\ l_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2}, \\ l_3 &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2}. \end{aligned}$$

2.1. Брокариани K_1 и K_2

Определение 1. Втората обща точка K_1 на описаните около триъгълниците ABT и CDT окръжности се нарича *брокариана*, съответна на страните AB и CD (фиг. 2). Аналогично се дефинира брокарианата K_2 , съответна на страните AD и BC .

Определение 2. Окръжността (c) , определена от средите E и F на диагоналите AC и BD и тяхната пресечна точка T , се нарича *брокарова окръжност* на четириъгълника (фиг. 2). (В случай, че $F \equiv T$, това е окръжността, минаваща през точките T и E , която се допира до диагонала BD в точка T).

Свойство 1 (Наймов 2005). Брокарианите K_1 и K_2 лежат на брокаровата окръжност (c) .

Определение 3. Окръжността (c_1) , определена от средите E_1 и E_3 на страните AB и CD и пресечната точка V на продълженията им, се нарича *брокарова окръжност*, съответна на страните AB и CD (фиг. 2).

Свойство 2 (Stefanov 2017). брокарианата K_1 лежи на брокаровата окръжност, съответна на страните AB и DC (фиг. 2).

Свойство 3 (Наймов 2001). Изпълнени са равенствата (фиг. 2):

$$\sphericalangle AK_1D = \sphericalangle ACD + \sphericalangle ABD; \quad \sphericalangle BK_1C = \sphericalangle BAC + \sphericalangle BDC.$$

(Предполагаме, че K_1 е вътрешна за четириъгълника $ABCD$.)

Свойство 4 (Nenkov 2019). Разстоянията между брокарианите K_1 и K_2 и върховете на четириъгълника и средите на страните и диагоналите му се определят по формулите:

$$K_1A = \frac{ma}{2l_1}, \quad K_1B = \frac{na}{2l_1}, \quad K_1C = \frac{mc}{2l_1}, \quad K_1D = \frac{nc}{2l_1}, \quad K_2A = \frac{dm}{2l_2},$$

$$\begin{aligned}
 K_2B &= \frac{bn}{2l_2}, \quad K_2C = \frac{bm}{2l_2}, \quad K_2D = \frac{dn}{2l_2}, \quad K_1E_1 = \frac{al_2}{2l_1}, \quad K_1E_3 = \frac{cl_2}{2l_1}, \\
 K_1E &= \frac{ml_3}{2l_1}, \quad K_1F = \frac{nl_3}{2l_1}, \quad K_2E_4 = \frac{dl_1}{2l_2}, \quad K_2E_2 = \frac{bl_1}{2l_2}, \quad K_2E = \frac{ml_3}{2l_2}, \\
 K_2F &= \frac{nl_3}{2l_2}, \quad K_1K_2 = \frac{mnl_3}{2l_1l_2}.
 \end{aligned}$$

2.2. Псевдоцентър O

Нека R_{ABC} , R_{BCD} , R_{CDA} и R_{DAB} са радиусите на описаните окръжности, съответно около триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB (виж фиг. 3). Псевдоцентър на четириъгълника се нарича точката O в равнината му, за която са изпълнени равенствата:

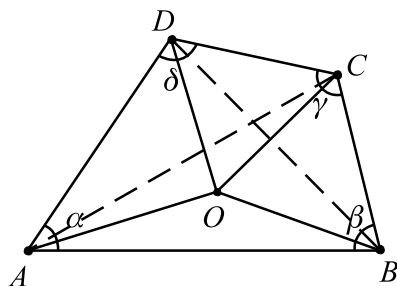
$$AO \cdot R_{BCD} = BO \cdot R_{CDA} = CO \cdot R_{DAB} = DO \cdot R_{ABC} = \frac{mn}{2\sqrt{\Delta}},$$

където Δ е величина, която предстои да определим.

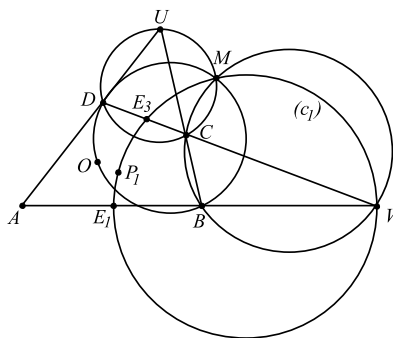
Свойство 5 (Nenkov 2016). *В сила са равенствата (фиг. 3):*

$$\begin{aligned}
 \sphericalangle AOB &= \sphericalangle ADB + \sphericalangle ACB, \quad \sphericalangle BOC = \sphericalangle BAC + \sphericalangle BDC, \\
 \sphericalangle COD &= \sphericalangle CAD + \sphericalangle CBD, \quad \sphericalangle DOA = \sphericalangle DBA + \sphericalangle DCA, \\
 \sphericalangle BOD &= 180^\circ - |\gamma - \alpha|, \quad \sphericalangle COA = 180^\circ - |\beta - \delta|.
 \end{aligned}$$

(Предполагаме, че O е вътрешна за четириъгълника $ABCD$.)



Фигура 3



Фигура 4

2.3. Точка на Микел M

Точка на Микел на четириъгълника се нарича общата точка на описаните окръжности около триъгълниците ABU , DCU , ADV и BCV .

Свойство 6 (Nenkov 2017). Точките B , O , D и M лежат на една окръжност (фиг. 4).

Свойство 7 (Stefanov 2017). Точката на Микел M лежи на брокаровата окръжност (c_1), съответна на страните AB и CD (фиг. 4).

Свойство 8 (Nenkov 2019). В сила са равенствата:

$$MA = \frac{ad}{2l_3}, \quad MB = \frac{ab}{2l_3}, \quad MC = \frac{cd}{2l_3}, \quad MD = \frac{cd}{2l_3}, \quad ME_1 = \frac{al_2}{2l_3},$$

$$ME_2 = \frac{bl_1}{2l_3}, \quad ME_3 = \frac{cl_2}{2l_3}, \quad ME_4 = \frac{dl_1}{2l_3}, \quad MK_1 = \frac{acl_2}{2l_1l_3}, \quad MK_2 = \frac{bdl_1}{2l_2l_3}.$$

2.4. Пресечни точки P_1 и P_2 на симетралите на срещу-положените страни и пресечна точка P_3 на симетралите на диагоналите

Пресечната точка на симетралите на страните AB и CD означаваме с P_1 , пресечната точка на симетралите на страните AD и BC – с P_2 , а тази на симетралите на диагоналите AC и BD – с P_3 .

Свойство 9 (Nenkov 2022). Точката P_3 лежи на брокаровата окръжност (c).

Свойство 10 (Nenkov 2022). Точката P_1 лежи на брокаровата окръжност (c_1), съответна на страните AB и CD .

Свойство 11 (Nenkov 2022). В сила са равенствата:

$$P_1M = \frac{|b^2 - d^2|}{4l_3 \sin \psi}, \quad P_2M = \frac{|a^2 - c^2|}{4l_3 \sin \varphi}, \quad P_3K_1 = \frac{|a^2 - c^2|}{4l_1 \sin \varphi_0},$$

$$P_3K_2 = \frac{|b^2 - d^2|}{4l_2 \sin \varphi_0}, \quad P_1K_1 = \frac{|m^2 - n^2|}{4l_1 \sin \psi}, \quad P_2K_2 = \frac{|m^2 - n^2|}{4l_2 \sin \varphi}.$$

Преди да пристъпим към извежданото на формули за разстоянията между така разгледаните забележителни точки в четириъгълника, да докажем две помощни равенства в него, които използваме нееднократно по-нататък:

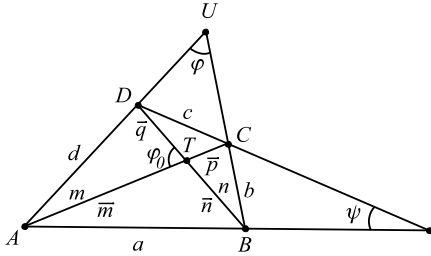
Лема 1. В сила е равенството:

$$a \cdot CV - c \cdot BV = bd \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}. \quad (*)$$

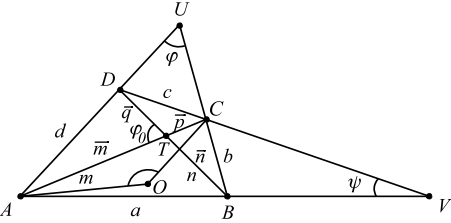
Доказателство. По теоремата на Менелай за $\triangle AVD$ и правата UCB

имаме (фиг. 5):

$$\frac{AB}{BV} \cdot \frac{CV}{CD} \cdot \frac{UD}{AU} = 1. \quad (1)$$



Фигура 5



Фигура 6

Понеже $AB = a$, $CD = c$, $AU = d + UD$, отук получаваме:

$$a \cdot CV \cdot UD = BV \cdot c \cdot (d + UD).$$

От последното равенство определяме:

$$a \cdot CV - c \cdot BV = \frac{BV \cdot d \cdot c}{UD}. \quad (2)$$

От друга страна, от $\triangle BCV$ и $\triangle DCU$ по синусовата теорема имаме:

$$\frac{\sin \psi}{b} = \frac{\sin \angle BCV}{BV}; \quad \frac{\sin \varphi}{c} = \frac{\sin \angle UCD}{UD}.$$

Понеже $\angle BCV = \angle UCD$, получаваме $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{c}{b} \cdot \frac{BV}{UD}$, откъдето следва $\frac{BV \cdot d \cdot c}{UD} = bd \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$. От (2) и последното равенство непосредствено получаваме доказаното равенство (*).

За изложението по-нататък въвеждаме означенията:

$$AT = \bar{m}, \quad BT = \bar{n}, \quad CT = \bar{p}, \quad DT = \bar{q}.$$

Лема 2. В сила е равенството:

$$m\bar{n} - n\bar{p} = bd \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}. \quad (3)$$

Доказателство. Като използваме равенството $a \cdot CV - c \cdot BV = bd \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$ (по Лема 1), получаваме последователно (фиг. 5):

$$m\bar{n} - n\bar{p} = (\bar{m} + \bar{p})\bar{n} - (\bar{n} + \bar{q})\bar{p} = \bar{m} \cdot \bar{n} - \bar{p} \cdot \bar{q} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\sin \varphi_0} (S_{ABT} - S_{CDT}) = \frac{2}{\sin \varphi_0} (S_{AVC} - S_{BVD}) = \\
 &= \frac{\sin \psi}{\sin \varphi_0} [CV \cdot (a + BV) - BV \cdot (c + CV)] = \\
 &= \frac{\sin \psi}{\sin \varphi_0} (a \cdot CV - c \cdot BV) = bd \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}.
 \end{aligned}$$

С това равенство (3) е доказано.

3. Формули за разстоянията от псевдоцентъра O до върховете на четириъгълника, до брокарианите му K_1 и K_2 и до точката M на Микел

От определението на псевдоцентъра O непосредствено следват равенствата (фиг. 6):

$$AO = \frac{mn}{2\sqrt{\Delta} \cdot R_{BCD}}, BO = \frac{mn}{2\sqrt{\Delta} \cdot R_{CDA}}, \quad (4)$$

$$CO = \frac{mn}{2\sqrt{\Delta} \cdot R_{DAB}}, DO = \frac{mn}{2\sqrt{\Delta} \cdot R_{ABC}}.$$

Понеже $R_{BCD} = \frac{n}{2 \sin \gamma}$, $R_{CDA} = \frac{m}{2 \sin \delta}$, $R_{DAB} = \frac{n}{2 \sin \alpha}$, $R_{ABC} = \frac{m}{2 \sin \beta}$ (по синусовата теорема), получаваме равенствата:

$$AO = \frac{m \sin \gamma}{\sqrt{\Delta}}, BO = \frac{n \sin \delta}{\sqrt{\Delta}}, \quad (5)$$

$$CO = \frac{m \sin \alpha}{\sqrt{\Delta}}, DO = \frac{n \sin \beta}{\sqrt{\Delta}}.$$

Да определим величината Δ . От $\triangle AOC$ по косинусовата теорема, предвид равенството $\angle AOC = 180^\circ - |\beta - \delta|$ (от Свойство 5), имаме:

$$m^2 = AO^2 + CO^2 + 2 \cdot AO \cdot CO \cdot \cos(\beta - \delta).$$

Заместяваме в това равенство с помощта на (5) и получаваме:

$$m^2 = \frac{m^2 \cdot \sin^2 \gamma}{\Delta} + \frac{m^2 \cdot \sin^2 \alpha}{\Delta} + 2 \frac{m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\Delta} \cdot \cos(\beta - \delta).$$

Оттук следва, че $\Delta = \sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos(\beta - \delta)$.

Забележка. Лесно се извежда следният еквивалентен вид на получе-

ната формула за величината Δ :

$$\Delta = \cos^2 \varphi + \cos^2 \psi - 2 |\cos \varphi| \cdot |\cos \psi| \cdot \cos (\beta + \delta). \quad (**)$$

Да докажем сега, че получените формули (5) за разстоянията AO , BO , CO и DO са еквивалентни на следните:

$$AO = \frac{2\bar{p}S}{bc\sqrt{\Delta}}, BO = \frac{2\bar{q}S}{cd\sqrt{\Delta}}, CO = \frac{2\bar{m}S}{da\sqrt{\Delta}}, DO = \frac{2\bar{n}S}{ab\sqrt{\Delta}}, \quad (6)$$

където S е лицето на четириъгълника, а величината Δ се определя с равенство (**).

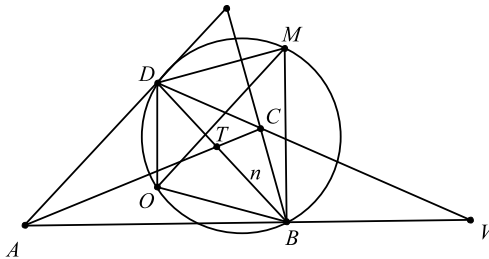
Действително имаме:

$$\begin{aligned} AO &= \frac{m \sin \gamma}{\sqrt{\Delta}} = \frac{m\bar{p} \sin \gamma}{\bar{p}\sqrt{\Delta}} = \frac{AC}{CT} \cdot \frac{\bar{p} \sin \gamma}{\sqrt{\Delta}} = \frac{S}{S_{BCD}} \cdot \frac{\bar{p} \sin \gamma}{\sqrt{\Delta}} = \\ &= \frac{2S}{bc \sin \gamma} \cdot \frac{\bar{p} \sin \gamma}{\sqrt{\Delta}} = \frac{2\bar{p}S}{bc\sqrt{\Delta}}. \end{aligned}$$

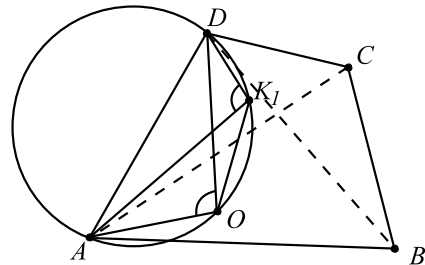
Получихме първото от равенства (6). Аналогично се получават и останалите равенства.

С помощта на изведените равенства (6) сега доказваме следната формула за разстоянието от псевдоцентъра O до точката M на Микел:

$$MO = \frac{S}{l_3\sqrt{\Delta}}. \quad (7)$$



Фигура 7



Фигура 8

Според Свойство 6 точките O , D , M и B лежат на една окръжност (фиг. 7). По теоремата на Птоломей за вписания четириъгълник $OBMD$ имаме:

$$MO \cdot BD = BO \cdot MD + DO \cdot MB.$$

$$\text{Но } BO = \frac{2\bar{q}S}{cd\sqrt{\Delta}}, \quad DO = \frac{2\bar{n}S}{ab\sqrt{\Delta}} \text{ (от (6))}, \quad MD = \frac{cd}{2l_3}, \quad MB = \frac{ab}{2l_3} \text{ (от$$

Свойство 8) и $BD = n$. Като заместим в последното равенство, получаваме:

$$MO \cdot n = \frac{2\bar{q}S}{cd\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{cd}{2l_3} + \frac{2\bar{n}S}{ab\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{ab}{2l_3}.$$

Оттук определяме:

$$MO = \frac{\bar{q} + \bar{n}}{nl_3\sqrt{\Delta}} S = \frac{DT + BT}{nl_3\sqrt{\Delta}} S = \frac{S}{l_3\sqrt{\Delta}}.$$

С това равенство (7) е доказано.

Сега да докажем следните формули за разстоянията от псевдоцентъра O до брокарианите K_1 и K_2 :

$$K_1O = \frac{S}{l_1\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}; \quad K_2O = \frac{S}{l_2\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \varphi_0}. \quad (8)$$

Понеже $\sphericalangle AOD = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD$ (от Свойство 5, фиг. 8) и $\sphericalangle AK_1D = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD$ (от Свойство 3), то $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AK_1D$ и четириъгълникът AOK_1D е вписан в окръжност. От теоремата на Птоломей тогава имаме:

$$K_1O \cdot AD = |AK_1 \cdot DO - AO \cdot DK_1|.$$

Но $AK_1 = \frac{ma}{2l_1}$, $DK_1 = \frac{nc}{2l_1}$ (от Свойство 4), $DO = \frac{2\bar{n}S}{ab\sqrt{\Delta}}$, $AO = \frac{2\bar{p}S}{bc\sqrt{\Delta}}$ (от (6)), $AD = d$ и като заместим в последното равенство, получаваме:

$$K_1O \cdot d = \left| \frac{ma}{2l_1} \cdot \frac{2\bar{n}S}{ab\sqrt{\Delta}} - \frac{nc}{2l_1} \cdot \frac{2\bar{p}S}{bc\sqrt{\Delta}} \right|,$$

т.е.:

$$K_1O = S \frac{|m\bar{n} - n\bar{p}|}{l_1bd\sqrt{\Delta}}.$$

Остава да вземем предвид, че $m\bar{n} - n\bar{p} = bd \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}$ (от Лема 2) и непосредствено получаваме първото от доказваните равенства (8). Аналогично се получава и второто равенство.

С помощта на изведените формули (3) – (8) за разстоянията между разглежданите забележителни точки доказваме следните интересни неравенства в четириъгълника:

$$l_2 \sin \varphi - l_3\sqrt{\Delta} \leq l_1 \sin \psi \leq l_2 \sin \varphi + l_3\sqrt{\Delta}; \quad (9)$$

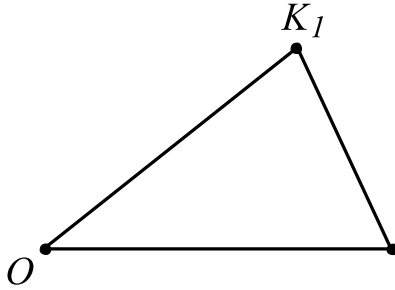
$$|cd\sqrt{\Delta} - 2nl_3 \sin \beta| \leq 2S \leq cd\sqrt{\Delta} + 2nl_3 \sin \beta; \quad (10)$$

$$|c\sqrt{\Delta} - 2l_1 \sin \alpha| \leq 2n \sin \varphi \leq c\sqrt{\Delta} + 2l_1 \sin \alpha; \quad (11)$$

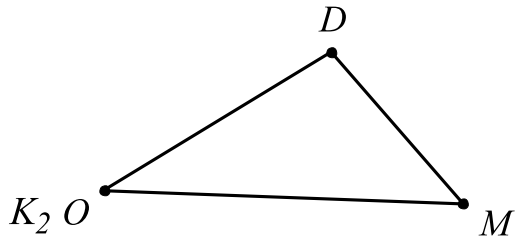
$$2S |l_1 \sin \varphi_0 - l_3 \sin \varphi| \leqslant acl_2 \sqrt{\Delta} \sin \varphi_0 \leqslant 2S (l_1 \sin \varphi_0 + l_3 \sin \varphi). \quad (12)$$

За да докажем неравенства (9), прилагаме неравенството на триъгълника към $\triangle K_1 K_2 O$. Имаме (фиг. 9):

$$|K_1 O - K_2 O| \leqslant K_1 K_2 \leqslant K_1 O + K_2 O.$$



Фигура 9



Фигура 10

Понеже $K_1 K_2 = \frac{mnl_3}{2l_1 l_2}$ (според Свойство 4), $K_1 O = \frac{S}{l_1 \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}$,
 $K_2 O = \frac{S}{l_2 \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \varphi_0}$ (от Свойство 8), след заместване в това равенство получаваме:

$$\left| \frac{S}{l_1 \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} - \frac{S}{l_2 \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \varphi_0} \right| \leqslant \frac{mnl_3}{2l_1 l_2} \leqslant \frac{S}{l_1 \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} + \frac{S}{l_2 \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \varphi_0}.$$

Като вземем предвид, че $S = \frac{1}{2} mn \sin \varphi_0$, оттук след преобразуване стигаме до доказваните неравенства (9).

За да докажем неравенство (10), прилагаме неравенството на триъгълника към $\triangle ODM$. Имаме (фиг. 10):

$$|DM - DO| \leqslant OM \leqslant DM + DO.$$

Понеже $DM = \frac{cd}{2l_3}$ (от Свойство 8), $DO = \frac{n \sin \beta}{\sqrt{\Delta}}$ (от (4)), както и $OM = \frac{S}{l_3 \sqrt{\Delta}}$ (от (7)), след заместване в това неравенство получаваме:

$$\left| \frac{cd}{2l_3} - \frac{n \sin \beta}{\sqrt{\Delta}} \right| \leqslant \frac{S}{l_3 \sqrt{\Delta}} \leqslant \frac{cd}{2l_3} + \frac{n \sin \beta}{\sqrt{\Delta}}.$$

Оттук след преобразуване стигаме до доказваните неравенства (10).

За да докажем неравенства (11), прилагаме неравенството на триъгълника към $\triangle OK_1C$. Имаме (фиг. 11):

$$|K_1C - OC| \leq K_1O \leq K_1C + OC.$$

Понеже $K_1O = \frac{S}{l_1\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}$ (от (8)), $OC = \frac{m \sin \alpha}{\sqrt{\Delta}}$ (от (4)), както и $K_1C = \frac{mc}{2l_1}$ (от Свойство 4), след заместване в това неравенство получаваме:

$$\left| \frac{mc}{2l_1} - \frac{m \sin \alpha}{\sqrt{\Delta}} \right| \leq \frac{S}{l_1\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \leq \frac{mc}{2l_1} + \frac{m \sin \alpha}{\sqrt{\Delta}}.$$

Като вземем предвид, че $S = \frac{1}{2}mn \sin \varphi_0$, оттук след преобразуване стигаме до доказваните неравенства (11).

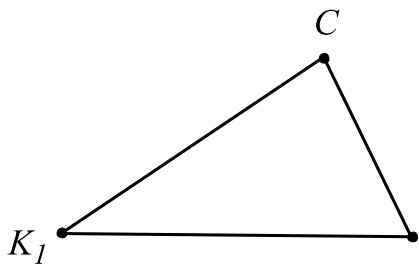
За да докажем неравенство (12), прилагаме неравенството на триъгълника към $\triangle OK_1M$. Имаме (фиг. 12):

$$|K_1M - K_1O| \leq OM \leq K_1M + K_1O.$$

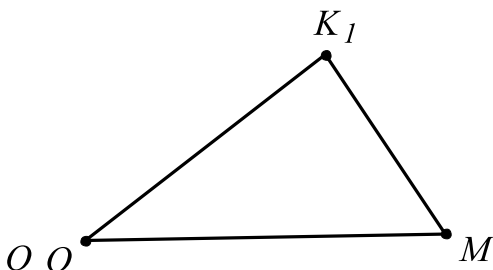
Понеже $K_1M = \frac{acl_2}{2l_1l_3}$ (от Свойство 8), $K_1O = \frac{S}{l_1\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}$ (от (8)) и $OM = \frac{S}{l_3\sqrt{\Delta}}$ (от (7)), след заместване в това неравенство получаваме:

$$\left| \frac{acl_2}{2l_1l_3} - \frac{S}{l_1\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \right| \leq \frac{S}{l_3\sqrt{\Delta}} \leq \frac{acl_2}{2l_1l_3} + \frac{S}{l_1\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}.$$

Оттук след преобразуване стигаме до доказваните неравенства (12).



Фигура 11



Фигура 12

Сега да докажем следните формули за разстоянията от пресечните точки U и V на продълженията на двойките срещуположни страни до средите на страните:

$$VE_1 = \frac{2S - bd \sin \varphi}{2c \sin \psi}; \quad VE_3 = \frac{2S + bd \sin \varphi}{2a \sin \psi}; \quad (13)$$

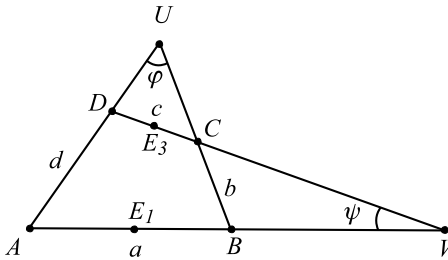
$$UE_4 = \frac{2S - ac \sin \psi}{2b \sin \varphi}; \quad UE_2 = \frac{2S + ac \sin \psi}{2d \sin \varphi}.$$

Действително, от $a = VA - VB$, $c = VD - VC$, $VE_3 = \frac{1}{2}(VC + VD)$, $VE_1 = \frac{1}{2}(VA + VB)$, имаме последователно (фиг. 13):

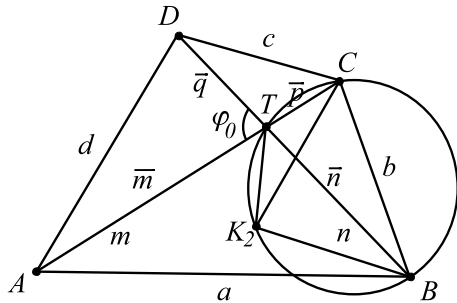
$$\begin{aligned} & a \cdot VE_3 + c \cdot VE_1 \\ &= \frac{1}{2}(VA - VB)(VD + VC) + \frac{1}{2}(VA + VB)(VD - VC) \\ &= \frac{1}{\sin \psi}(VA \cdot VD \cdot \sin \psi - VB \cdot VC \cdot \sin \psi) \\ &= \frac{2}{\sin \psi}(S_{AVD} - S_{BCV}) = \frac{2S}{\sin \psi}, \end{aligned}$$

т.е.:

$$a \cdot VE_3 + c \cdot VE_1 = \frac{2S}{\sin \psi}. \quad (14)$$



Фигура 13



Фигура 14

От друга страна, понеже $a \cdot CV - c \cdot BV = bd \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$ (от Лема 1), получаваме:

$$\begin{aligned} & a \cdot VE_3 - c \cdot VE_1 = \\ &= \frac{1}{2}(VA - VB)(VD + VC) - \frac{1}{2}(VA + VB)(VD - VC) = \\ &= VA \cdot VC - VB \cdot VD = (a + BV) \cdot VC - (c + CV) \cdot BV = \\ &= a \cdot CV - c \cdot BV = bd \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}, \end{aligned}$$

т. е.:

$$a \cdot VE_3 - c \cdot VE_1 = bd \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}. \quad (15)$$

Събираме и изваждаме почленно равенства (14) и (15) и получаваме:

$$VE_3 = \frac{1}{2a} \left(\frac{2S}{\sin \psi} + bd \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \right) = \frac{2S + bd \sin \varphi}{2a \sin \psi} \text{ и } VE_1 = \frac{2S - bd \sin \varphi}{2c \sin \psi}.$$

С това доказахме първите две равенства в (13). Аналогично се доказват и другите две.

Да изведем формули за разстоянията от брокарианите K_1 и K_2 на четириъгълника до пресечната точка T на диагоналите и пресечните точки U и V на продълженията на двойките срещуположни страни. Доказваме първо следните формули:

$$K_1 T = \frac{acmn \sin \varphi}{4l_1 S}; \quad K_2 T = \frac{bdmn \sin \varphi}{4l_2 S}. \quad (16)$$

Брокарианата K_2 лежи на описаната окръжност около ΔBTC (по Определение 1). Затова четириъгълникът $BCTK_2$ е вписан в окръжност и по теоремата на Птоломей имаме (фиг. 14):

$$K_2 T \cdot BC = |CK_2 \cdot BT - BK_2 \cdot CT|.$$

Но $BC = b$, $CK_2 = \frac{mb}{2l_2}$, $BK_2 = \frac{nb}{2l_2}$ (от Свойство 4), $BT = \bar{n}$, $CT = \bar{p}$ и след заместване в последното равенство получаваме:

$$K_2 T \cdot b = \left| \frac{mb}{2l_2} \bar{n} - \frac{nb}{2l_2} \bar{p} \right|.$$

Като вземем предвид, че $m\bar{n} - n\bar{p} = bd \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}$ (от Лема 2) и $S = \frac{1}{2} mn \sin \varphi_0$,

оттук определяме: $K_2 T = \frac{1}{2l_2} |m\bar{n} - n\bar{p}| = \frac{bdmn \sin \varphi}{4l_2 S}$. Получихме второто от равенствата (16). Аналогично се получава и първото равенство.

Да докажем следните равенства:

$$VK_1 = \frac{S}{l_1 \sin \psi}; \quad UK_2 = \frac{S}{l_2 \sin \varphi}. \quad (17)$$

Брокарианата K_1 лежи на брокаровата окръжност (c_1), съответна на страните AB и CD (от Свойство 2, фиг. 15). Последната е определена от точките E_1 , E_3 и V . По теоремата на Птоломей за вписания четириъгълник $E_1VE_3K_1$ имаме:

$$VK_1 \cdot E_1E_3 = K_1E_1 \cdot VE_3 + K_1E_3 \cdot VE_1.$$

Но

$$E_1E_3 = l_2, \quad K_1E_1 = \frac{al_2}{2l_1}, \quad K_1E_3 = \frac{cl_2}{2l_1} (4),$$

$$VE_3 = \frac{1}{2}(VC + VD), \quad VE_1 = \frac{1}{2}(VA + VB)$$

и след заместване в последното равенство получаваме:

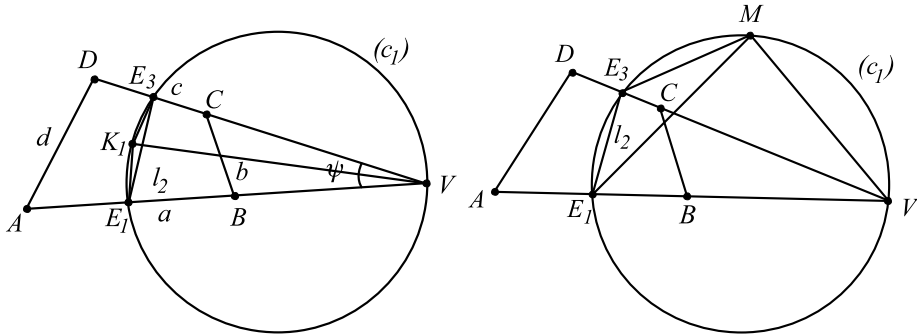
$$VK_1 \cdot l_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{al_2}{2l_1} \cdot (VC + VD) + \frac{1}{2} \cdot \frac{cl_2}{2l_1} \cdot (VA + VB).$$

Като вземем предвид $a = VA - VB$ и $c = VD - VC$, определяме:

$$VK_1 = \frac{1}{4l_1}(VA - VB)(VC + VD) + \frac{1}{4l_1}(VD - VC)(VA + VB) =$$

$$= \frac{1}{2l_1}(VA \cdot VD - VB \cdot VC) = \frac{1}{2l_1} \left(\frac{2S_{VAD}}{\sin \psi} - \frac{2S_{VBC}}{\sin \psi} \right) = \frac{S}{l_1 \sin \psi}.$$

С това доказахме първото от равенствата (17). Аналогично се доказва и второто равенство.



Фигура 15

Фигура 16

Да определим разстоянията от точката на Микел M до пресечните точки U и V на продълженията на двойките срещуположни страни. Ще докажем следните формули (фиг. 16):

$$MU = \frac{ac \sin \psi}{2l_3 \sin \varphi}; \quad MV = \frac{bd \sin \varphi}{2l_3 \sin \psi}. \quad (18)$$

Точката на Микел M лежи на брокаровата окръжност (c_1) , съответна на страните AB и CD (от Свойство 7) (фиг. 16). Последната е определена от точките E_1 , E_3 и V . По теоремата на Птолемея, от вписания

четириъгълник E_1VME_3 имаме:

$$E_1M \cdot E_3V = E_1E_3 \cdot MV + E_1V \cdot E_3M.$$

Но $E_1M = \frac{al_2}{2l_3}$, $E_3M = \frac{cl_2}{2l_3}$ (от Свойство 8), $E_3V = \frac{2S + bd \sin \varphi}{2a \sin \psi}$,
 $E_1V = \frac{2S - bd \sin \varphi}{2c \sin \psi}$ (от (13)), $E_1E_3 = l_2$ и след заместване в последното равенство получаваме:

$$\frac{al_2}{2l_1} \cdot \frac{2S + bd \sin \varphi}{2a \sin \psi} = l_2 \cdot MV + \frac{2S - bd \sin \varphi}{2c \sin \psi} \cdot \frac{cl_2}{2l_1}.$$

Оттук след опростяване получаваме второто от равенствата (18). Аналогично се получава и първото равенство.

Да определим разстоянията от пресечните точки P_1 и P_2 на симетралите на двойките срещуположни страни до средите на съответните страни. Доказваме следните формули:

$$\begin{aligned} P_1E_3 &= \frac{|m^2 - n^2| + |b^2 - d^2|}{4a \sin \psi}; & P_1E_1 &= \frac{|b^2 - d^2| - |m^2 - n^2|}{4c \sin \psi}; \\ P_2E_4 &= \frac{|m^2 - n^2| + |a^2 - c^2|}{4b \sin \varphi}; & P_2E_2 &= \frac{|a^2 - c^2| - |m^2 - n^2|}{4d \sin \varphi}. \end{aligned} \quad (19)$$

Точките K_1, P_1 и M лежат на брокаровата окръжност (c_1), съответна на страните AB и CD (от Свойства 2, 7 и 10) (фиг. 17). Точката E_3 също лежи на тази окръжност (по Определение 3). По теоремата на Птоломей, за вписания четириъгълник $P_1ME_3K_1$ имаме:

$$P_1E_3 \cdot K_1M = P_1K_1 \cdot ME_3 + P_1M \cdot K_1E_3.$$

Но $K_1M = \frac{acl_2}{2l_1l_3}$ и $ME_3 = \frac{cl_2}{2l_3}$ (от (8)), $P_1K_1 = \frac{|m^2 - n^2|}{4l_1 \sin \psi}$ (от (11)),
 $P_1M = \frac{|b^2 - d^2|}{4l_3 \sin \psi}$ (от (11)), $K_1E_3 = \frac{cl_2}{2l_1}$ (от (3)) и след заместване в последното равенство получаваме:

$$P_1E_3 \cdot \frac{acl_2}{2l_1l_3} = \frac{|m^2 - n^2|}{4l_1 \sin \psi} \cdot \frac{cl_2}{2l_3} + \frac{|b^2 - d^2|}{4l_3 \sin \psi} \cdot \frac{cl_2}{2l_1}.$$

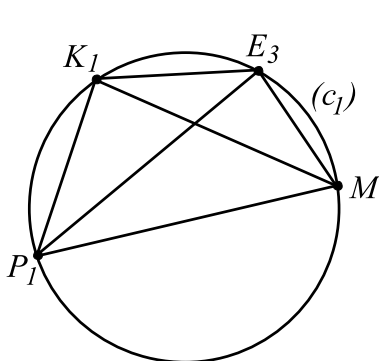
Оттук след преобразуване стигаме до първото от равенствата (19). Аналогично се доказват и останалите равенства.

Да изведем формули и за разстоянията от пресечната точка P_3 на симетралите на диагоналите до средите E и F на диагоналите и до пре-

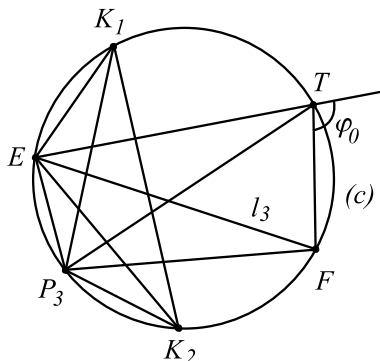
сечната им точка T . Доказваме следните формули:

$$P_3E = \frac{m}{8S} \left| |a^2 - c^2| - |b^2 - d^2| \right|; \quad (20)$$

$$P_3F = \frac{n}{8S} \left(|a^2 - c^2| + |b^2 - d^2| \right); \quad P_3T = \frac{l_3}{\sin \varphi_0}.$$



Фигура 17



Фигура 18

Пресечната точка P_3 на симетралите на диагоналите лежи на брокаровата окръжност (c) на четириъгълника (от Свойство 9) (фиг. 18). Последната е определена от средите E и F на диагоналите и пресечната им точка T (по Определение 1). Брокарианите K_1 и K_2 също лежат на тази окръжност (от Свойство 1). По теоремата на Птоломей, от вписания четириъгълник $P_3EK_1K_2$ тогава имаме:

$$P_3E \cdot K_1K_2 = |P_3K_1 \cdot K_2E - P_3K_2 \cdot K_1E|.$$

Понеже $K_1K_2 = \frac{mnl_3}{2l_1l_2}$ (от Свойство 4), $P_3K_1 = \frac{|a^2 - c^2|}{4l_1 \sin \varphi_0}$, $P_3K_2 = \frac{|b^2 - d^2|}{4l_2 \sin \varphi_0}$ (от Свойство 11), $K_1E = \frac{ml_3}{2l_1}$, $K_2E = \frac{ml_3}{2l_2}$ (от Свойство 4), след заместване в това равенство получаваме:

$$P_3E \cdot \frac{mnl_3}{2l_1l_2} = \frac{|a^2 - c^2|}{4l_1 \sin \varphi_0} \cdot \frac{ml_3}{2l_2} - \frac{|b^2 - d^2|}{4l_2 \sin \varphi_0} \cdot \frac{ml_3}{2l_1}.$$

Предвид равенството $S = \frac{1}{2}mn \sin \varphi_0$, оттук след преобразуване стигаме до първото от равенствата (20). Аналогично се получава и второто равенство.

Отсечката P_3T е диаметър на брокаровата окръжност (c) на четириъгълника (Nenkov 2022) (фиг. 18), затова $P_3T = \frac{EF}{\sin \varphi_0}$, с което е доказано и третото от равенствата (20).

С помощта на изведените формули за разстоянията между разгледаните забележителни точки да докажем още няколко интересни неравенства в четириъгълника:

$$|a^2 - c^2| + |b^2 - d^2| \leq l_3 m; \quad (21)$$

$$S \leq cl_2 + \frac{1}{2}bd \sin \varphi; \quad (22)$$

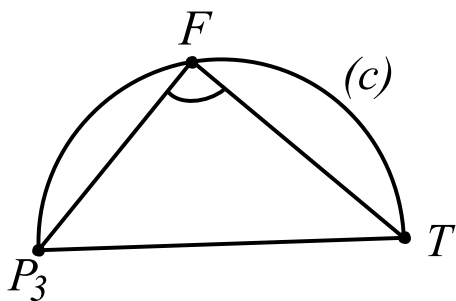
$$|4l_1l_2 - |m^2 - n^2|| \leq 4S \leq 4l_1l_2 + |m^2 - n^2|; \quad (23)$$

$$|acl_2 \sin \psi - bdl_1 \sin \varphi| \leq 2l_3S \leq acl_2 \sin \psi + bdl_1 \sin \varphi; \quad (24)$$

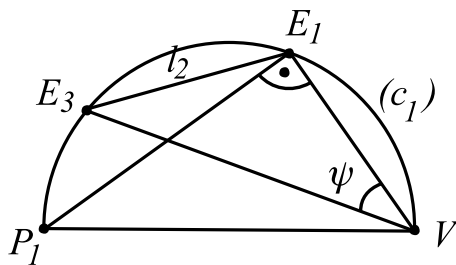
$$\begin{aligned} & \left| m \left| a^2 - c^2 \right| - |b^2 - d^2| \right| - n \left(|a^2 - c^2| + |b^2 - d^2| \right) \leq 8l_3S \leq \\ & \leq m \left| a^2 - c^2 \right| - |b^2 - d^2| + n \left(|a^2 - c^2| + |b^2 - d^2| \right). \end{aligned} \quad (25)$$

За да докажем първото неравенство, използваме, че отсечката P_3T , както видяхме по-горе, е диаметър на брокаровата окръжност (c) . Точката F лежи на тази окръжност (от Определение 2). Следователно $\triangle P_3FT$ е правоъгълен, откъдето имаме (фиг. 19):

$$P_3F \leq P_3T.$$



Фигура 19



Фигура 20

Но $P_3F = \frac{n}{8S} (|a^2 - c^2| + |b^2 - d^2|)$, $P_3T = \frac{l_3}{\sin \varphi_0}$ (от (20)), затова е

изпълнено неравенството:

$$\frac{n}{8S} (|a^2 - c^2| + |b^2 - d^2|) \leq \frac{l_3}{\sin \varphi_0}.$$

Понеже $S = \frac{1}{2}mn \sin \varphi_0$, оттук непосредствено получаваме доказваното неравенство (21).

За да докажем неравенство (22), използваме, че точката P_1 лежи на брокаровата окръжност (c_1), съответна на страните AB и CD (от Свойство 10) и P_1V е неин диаметър (фиг. 20) (Nenkov 2022). Точката E_1 също лежи на окръжността (c_1) (по Определение 3). Тогава от правоъгълния $\triangle E_1P_1V$ имаме (фиг. 20):

$$VE_1 \leq P_1V.$$

Но $VE_1 = \frac{2S - bd \sin \varphi}{2l \sin \psi}$ (от (13)), $P_1V = \frac{E_1E_3}{\sin \psi} = \frac{l_2}{\sin \psi}$ (по синусовата теорема от $\triangle E_1E_3V$) и след заместване в последното неравенство получаваме:

$$\frac{2S - bd \sin \varphi}{2l \sin \psi} \leq \frac{l_2}{\sin \psi}.$$

Оттук непосредствено следва доказваното неравенство (22).

За да докажем неравенства (23), прилагаме неравенството на триъгълника към $\triangle K_1P_1V$ (фиг. 21). Имаме:

$$|P_1V - K_1P_1| \leq K_1V \leq P_1V + K_1P_1.$$

Понеже $P_1V = \frac{l_2}{\sin \psi}$ (както видяхме в доказателството на неравенството (22)), $K_1P_1 = \frac{|m^2 - n^2|}{4l_1 \sin \psi}$ (от Свойство 11) и $K_1V = \frac{S}{l_1 \sin \psi}$ (от (17)), като заместим в последните неравенства, получаваме:

$$\left| \frac{l_2}{\sin \psi} - \frac{|m^2 - n^2|}{4l_1 \sin \psi} \right| \leq \frac{S}{l_1 \sin \psi} \leq \frac{l_2}{\sin \psi} + \frac{|m^2 - n^2|}{4l_1 \sin \psi}.$$

Оттук след опростяване стигаме до доказваните неравенства (23).

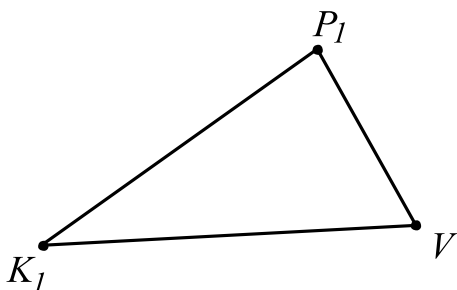
За да докажем неравенствата (24), прилагаме неравенството на триъгълника към $\triangle K_1K_2T$ (фиг. 22):

$$|K_1T - K_2T| \leq K_1K_2 \leq K_1T + K_2T.$$

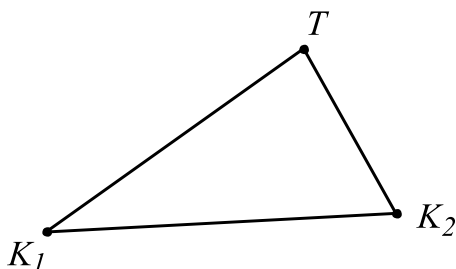
Понеже $K_1T = \frac{acmn}{4l_1S} \sin \psi$, $K_2T = \frac{bdmn}{4l_2S} \sin \varphi$ (от (16)) както и

$K_1K_2 = \frac{mnl_3}{2l_1l_2}$ (от (4)), като заместим в последните неравенства, получаваме

$$\left| \frac{acmn}{4l_1S} \sin \psi - \frac{bdmn}{4l_2S} \sin \varphi \right| \leq \frac{mnl_3}{2l_1l_2} \leq \frac{acmn}{4l_1S} \sin \psi + \frac{bdmn}{4l_2S} \sin \varphi.$$



Фигура 21

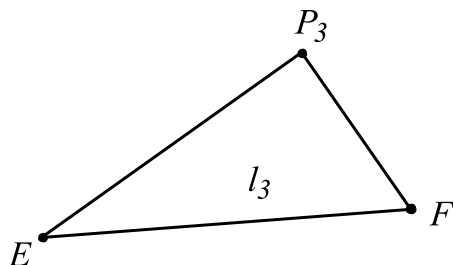


Фигура 22

Оттук непосредствено следват доказваните неравенства (24).

За да докажем неравенствата (25), прилагаме неравенството на триъгълника към $\triangle EFP_3$ (фиг. 23):

$$|P_3E - P_3F| \leq EF \leq P_3E + P_3F.$$



Фигура 23

Понеже

$$P_3E = \frac{m}{8S} \left| |a^2 - c^2| - |b^2 - d^2| \right|, \quad P_3F = \frac{n}{8S} (|a^2 - c^2| + |b^2 - d^2|)$$

(от (20) и $EF = l_3$ след заместване, получаваме:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{m}{8S} \left| |a^2 - c^2| - |b^2 - d^2| \right| - \frac{n}{8S} (|a^2 - c^2| + |b^2 - d^2|) \right| \leq l_3 \leq \\ & \leq \frac{m}{8S} \left| |a^2 - c^2| - |b^2 - d^2| \right| + \frac{n}{8S} (|a^2 - c^2| + |b^2 - d^2|). \end{aligned}$$

Оттук непосредствено следват доказваните неравенства (25).

В заключение предлагаме на читателите, като приложат неравенството на триъгълника съответно към $\triangle E_1MV$, $\triangle K_1P_3E_1$, $\triangle K_1E_3V$, $\triangle E_1E_3V$ и $\triangle K_1OM$, да докажат следните неравенства:

$$acl_2 \sin \psi - bd(c - l_3) \sin \varphi \leq 2l_3S \leq acl_2 \sin \psi + bd(c + l_3) \sin \varphi;$$

$$8S \geq \frac{4l_1n_1 \sin \varphi \left| |a^2 - c^2| - |b^2 - d^2| \right|}{|a^2 - c^2| + 2ml_3 \sin \varphi};$$

$$l_2ac \sin \psi - l_1bd \sin \varphi \geq 2(l_1 - a)S;$$

$$S \geq \frac{acl_2 \sin \psi - bdl_1 \sin \varphi}{2(a + l_1)};$$

$$S \geq \frac{2acl_2 \sin \psi + (c - a)bd \sin \varphi}{2(a + c)};$$

$$2(a - c)S \leq 2acl_2 \sin \psi + (a + c)bd \sin \varphi;$$

$$S \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} + \frac{l_1}{l_3} \right) \geq \frac{acl_2}{l_3} \sqrt{\Delta}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- ХАИМОВ, Х., 2001. Брокарианите – забележителни точки в четириъгълника. *Математика и информатика*, Т. 44, № 6, с. 17 – 23.
- ХАИМОВ, Х., 2005. Брокариани в четириъгълника. *Математика*, № 5, с. 15 – 21.
- НЕНКОВ, В., СТЕФАНОВ, С., ХАИМОВ, Х., 2016. Псевдоцентър и ортоцентър – забележителни точки в четириъгълника. *Математика и информатика*, Т. 59, № 6, с. 614 – 625.
- НЕНКОВ, В., СТЕФАНОВ, С., ХАИМОВ, Х., 2017. Геометрия на четириъгълника. Точка на Микел. Инверсна изогоналност. *Математика и информатика*, Т. 60, № 1, с. 81 – 93.
- НЕНКОВ, В., СТЕФАНОВ, С., ХАИМОВ, Х., 2019. Формули за разстоянията от брокарианите и точката на Микел в четириъгълник до върховете му и средите на страните и диагоналите му. *Математика и информатика*, Т. 62, № 3, с. 305 – 324.
- СТЕФАНОВ, С., 2017. Втори псевдоцентър на четириъгълника. *Математика и информатика*, Т. 60, № 3, с. 252 – 261.

REFERENCES

- HAIMOV, H., 2001. The Brocardians – notable points in the quadrilateral. *Mathematics and Informatics*, vol. 44, no. 6, pp. 17 – 23. (in Bulgarian).
- HAIMOV, H., 2005. Brocardians of a quadrilateral. *Mathematics*, no. 5, pp. 15 – 21. (in Bulgarian).
- NENKOV, V., GROZDEV, S., VELCHEV, A., ALASHKA, R., STEFANOV, S., HAIMOV, H., 2022. New formulas for distances between new and traditional remarkable points in a quadrilateral. *AIP Conference Proceedings*, vol. 2939, no. 1, 060003. ISBN 978-0-7354-4396-9, DOI: 10.1063/5.0188027.
- NENKOV, V., STEFANOV, S., HAIMOV, H., 2016. Pseudocenter and orthocenter – notable points in the quadrilateral. *Mathematics and Informatics*, vol. 59, no. 6, pp. 614 – 625. (in Bulgarian).
- NENKOV, V., STEFANOV, S., HAIMOV, H., 2017. Geometry of the quadrilateral. Miquel point. Inverse isogonality. *Mathematics and Informatics*, vol. 60, no. 1, pp. 81 – 93. (in Bulgarian).
- NENKOV, V., STEFANOV, S., HAIMOV, H., 2019. Formulas for the distances from the Brocardians and the Miquel point in a quadrilateral to its vertices and the midpoints of its sides and diagonals. *Mathematics and Informatics*, vol. 62, no. 3, pp. 305 – 324. (in Bulgarian).
- STEFANOV, S., 2017. Second pseudocenter of the quadrilateral. *Mathematics and Informatics*, vol. 60, no. 3, pp. 252 – 261. (in Bulgarian).

DISTANCES BETWEEN REMARKABLE POINTS AND INEQUALITIES IN A CONVEX QUADRILATERAL

Abstract. In this article, using the formulas derived in (Nenkov 2019) and (Nenkov 2022) for the distances from some remarkable points in the quadrilateral to its vertices and to the midpoints of its sides and diagonals, formulas for the distances from these remarkable points to the intersection of the diagonals and to the intersections of the pairs of opposite sides were obtained. Formulas are also derived for the distances from another remarkable point to the vertices of the quadrilateral, as well as to the remarkable points discussed in (Nenkov 2019). Using the obtained formulas for these distances, a number of interesting inequalities in the quadrilateral are proved.

Keywords: quadrilateral; remarkable points; distances; inequalities

✉ **Dr. Yordan Tabov, Prof.**

ORCID iD: 0000-0001-5436-5134

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences

Acad. Georgi Bonchev St., bl. 8

1113, Sofia, Bulgaria

E-mail: tabov@math.bas.bg

✉ **Dr. Stanislav Stefanov, Assist. Prof.**

ORCID iD: 0000-0002-8254-1075

University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy

1, Hristo Smirnenski Blvd.

1164, Sofia, Bulgaria

E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

✉ **Dr. Krasimir Kanchev, Assist. Prof.**

ORCID iD: 0000-0002-4460-3781

University of Transport "Todor Kableshkov"

158, Geo Milev St.,

1574, Sofia, Bulgaria

E-mail: kkanchev@vtu.bg

✉ **Haim Haimov, MSc math**

ORCID iD: 0000-0002-0914-1059

16, Bratya Shkorpil St.

Varna, Bulgaria

E-mail: haim.haimov@abv.bg